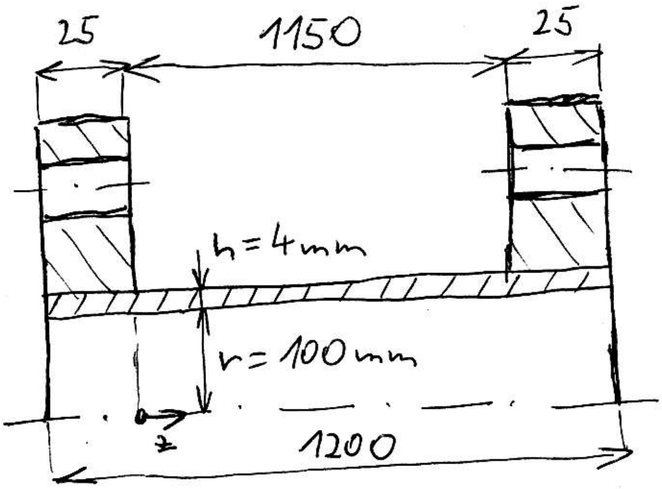
Př.: Vyšetřete namáhání v ocelové trubce dle obrázku namáhané vnitřním tlakem. Posuďte bezpečnost k meznímu stavu pružnosti. $p = 0{,}9\ MPa$.



Trubku můžeme považovat za válcovou momentovou skořepinu podél rozměru 1150mm. V místě přírub je tuhost trubky značně větší než mimo ně, takže můžeme uvažovat, že je zde radiální posuv blízký ∅.

1) Rozhodneme, zda se jedná o dlouhou skořepinu:

$$l_0 = 3\sqrt{r\cdot h} = 3\cdot\sqrt{4\cdot 100} \doteq \underline{\underline{60\ mm}}$$

$$L = 1150mm \gg 2\cdot l_0 = 120mm \Rightarrow \text{jedná se o dlouhou skořepinu} \Rightarrow C_3 = C_4 = \underline{\underline{0}}.$$

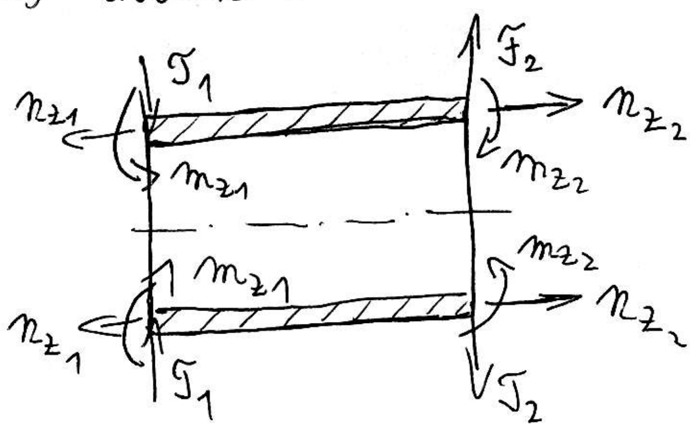
2) Obecný tvar řešení: $u = \hat{u} + u_p$, kde

$$\hat{u} = e^{-\beta z}(C_1\cdot\sin\beta z + C_2\cdot\cos\beta z) + e^{\beta z}(\underbrace{C_3}_{0}\cdot\sin\beta z + \underbrace{C_4}_{0}\cdot\cos\beta z)$$

$$u_p = \frac{r^2}{E\cdot h}\left(p_n - \underbrace{\frac{\mu}{r}\cdot\left(C_0 - \int p_z\,dz\right)}_{0}\right)$$

$$\Rightarrow u = e^{-\beta z}(C_1\cdot\sin\beta z + C_2\cdot\cos\beta z) + \frac{p\cdot r^2}{Eh}$$

3) Uvolnění



OP:

$z=0:\ u=0$ (vysvětlení viz výše)

$z=0:\ \vartheta = \frac{du}{dz} = 0$

dosazením do 1. OP:

$$z=0:\quad u = 0 = e^{-\beta\cdot 0}\cdot(C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1) + \frac{pr^2}{Eh} \Rightarrow \underline{\underline{C_2 = -\frac{pr^2}{Eh}}}$$

dosazením do 2. OP:

$$z=0:\quad \frac{du}{dz} = 0 = -\beta\cdot e^{-\beta z}(C_1 \sin\beta z + C_2\cdot\cos\beta z) + e^{-\beta z}(C_1\cdot\beta\cdot\cos\beta z -$$
$$- C_2\cdot\beta\cdot\sin\beta z) = -\beta\cdot e^{0}\cdot(C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1) + e^{0}(C_1\beta -$$
$$- C_2\cdot 0) = -\beta\cdot C_2 + \beta C_1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C_1 = C_2 = -\frac{pr^2}{Eh}}}$$

radiální posunutí studované trubky můžeme po dosazení konstant C_1 a C_2 vyjádřit jako:

$$u(z) = e^{-\beta z}\cdot\left(-\frac{pr^2}{Eh}\right)\cdot(\sin\beta z + \cos\beta z) + \frac{pr^2}{Eh} =$$
$$= \underline{\underline{\frac{pr^2}{E\cdot h}\cdot\left(1 - e^{-\beta z}(\sin\beta z + \cos\beta z)\right)}}$$

4) Ohybový moment (liniový):

$$m_z = -B\cdot\frac{d^2u}{dz^2}\quad ;\quad B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{pr^2}{E\cdot h}\cdot\left[e^{-\beta z}\cdot(-\beta)\cdot(\sin\beta z + \cos\beta z) + e^{-\beta z}(\beta\cdot\cos\beta z -\right.$$
$$\left. -\beta\cdot\sin\beta z)\right] = \underline{\frac{pr^2}{E\cdot h}\cdot e^{-\beta z}\cdot\beta\cdot 2\cdot\sin\beta z}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{2\beta pr^2}{E\cdot h}\cdot\left[e^{-\beta z}(-\beta)\sin\beta z + e^{-\beta z}\beta\cdot\cos\beta z\right] =$$
$$= \underline{\frac{2\beta^2 pr^2}{E\cdot h}\cdot e^{-\beta z}(\cos\beta z - \sin\beta z)}$$

po dosazení:

$$m_z = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{2pr^2}{E\cdot h} \cdot e^{-\beta z}(\cos\beta z - \sin\beta z)\cdot \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{r\cdot h} =$$

$$= -\frac{p\cdot r\cdot h}{2\cdot\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot e^{-\beta z}(\cos\beta z - \sin\beta z)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-0{,}3^2)}{100^2\cdot 4^2}} = 0{,}06427 \text{ rad}$$

$\Rightarrow m_z$ má maximum pro $z=0$

5) Tečný ohybový moment (liniový):

$$m_t(z) = \mu\cdot m_z(z)$$

6) Posouvající síla (liniová)

$$T = \frac{d m_z(z)}{dz} = -B\cdot\frac{d^3u}{dz^3} =$$

$$= -\frac{p\cdot r\cdot h}{2\cdot\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \left[e^{-\beta z}\cdot(-\beta)\cdot(\cos\beta z - \sin\beta z) + \right.$$

$$\left. + e^{-\beta z}\cdot\beta\cdot(-\sin\beta z - \cos\beta z)\right] =$$

$$= -\frac{p\cdot r\cdot h}{2\cdot\sqrt{3\cdot(1-\mu^2)}} \cdot e^{-\beta z}\cdot(-2\beta)\cdot\cos\beta z\cdot\frac{\beta^2}{\beta} =$$

$$= +\frac{p\cdot r^2\cdot h^2\cdot\beta^3}{3\cdot(1-\mu^2)} \cdot e^{-\beta z}\cdot\cos\beta z \qquad \beta^2 = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{r\cdot h}$$

$T(z)$ má opět maximum pro $z=0$.

7) Liniové síly:

$n_z = 0$: V ose trubky nepůsobí žádné zatížení

$$n_t = \mu\cdot n_z + Eh\cdot\frac{u}{r} = \frac{E\cdot h}{r}\cdot\frac{pr^2}{E\cdot h}\cdot\left[1 - e^{-\beta z}(\sin\beta z + \cos\beta z)\right] =$$

(posunutí)

$$= p\cdot r\cdot\left[1 - e^{-\beta z}(\sin\beta z + \cos\beta z)\right]$$

pro $z=0$: $n_t = 0$

pro $z\to\infty$: $n_t \to p\cdot r$

8) Posouzení bezpečnosti:

Liniové momenty nabývají extrémních hodnot v místě vetknutí (přírub). Dál od přírub, kde již není vliv vetknutí odpovídá napětí membránové napjatosti s hodnotami složek napětí nižšími než ve vetknutí (bude ukázáno dále v textu).

$$m_z(z=0) = -\frac{p\,r\,h}{2\cdot\sqrt{3(1-\mu^2)}} = \frac{-0{,}9\cdot 100\cdot 4}{2\cdot\sqrt{3(1-0{,}3^2)}} = \underline{-108{,}9\ \mathrm{Nmm/mm}}$$

$$\sigma_{z,\mathrm{ex}} = \pm\frac{6\,m_z}{h^2}$$

tah

$$\sigma_{z,\mathrm{ex}}(z=0) = \frac{6\cdot 108{,}9}{4^2} \doteq \underline{\underline{40{,}8\ \mathrm{MPa}}}$$

$$m_t = \mu\cdot m_z$$

$$m_t(z=0) = 0{,}3\cdot(-108{,}9) \doteq \underline{-32{,}7\ \mathrm{Nmm/mm}}$$

$$\sigma_{t,\mathrm{ex}} = \pm\frac{6\,m_t}{h^2}$$

tah

$$\sigma_{t,\mathrm{ex}}(z=0) = \frac{6\cdot 32{,}7}{4^2} \doteq \underline{\underline{12{,}3\ \mathrm{MPa}}}$$

V momentové skořepině se napětí σ_z, σ_t určí ze vztahů:

$$\sigma_z = \frac{n_z}{h} \pm \frac{6\,m_z}{h^2}$$

$$\sigma_t = \frac{n_t}{h} \pm \frac{6\cdot m_t}{h^2}$$

ve vetknutí: $z=0$ je $n_t = 0$ viz bod 7 a $n_z = 0$, proto platí výše uvedené hodnoty σ_z, σ_t.

Dále od vetknutí (přírub) bude $n_t \neq 0$. $n_z = 0$ po celé délce trubky, protože v axiálním směru není žádné zatížení.

bezpečnost k MS pružnosti pro $z=0$:

$\sigma_z(z=0) = 40{,}8\ \text{MPa} = \sigma_1$; $\sigma_t(z=0) = 12{,}3\ \text{MPa} = \sigma_2$

$\sigma_r \approx p = -0{,}9\ \text{MPa}$

$\sigma_{red}(\text{MAX}\ \tau) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_z - \sigma_r = 40{,}8 - (-0{,}9) = \underline{41{,}7\ \text{MPa}}$

$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red}}$ - záleží na použitém materiálu

---

Pro porovnání určíme bezpečnost k MS pružnosti v místech, která nejsou ovlivněna přítomností příruby, tj. v místech, kde by se měla vyskytovat membránová napjatost.

Mělo by platit:

$$\sigma_t \cdot 2 \cdot h \cdot L - p \cdot 2r \cdot L = 0$$

$$\sigma_t = \frac{p \cdot r}{h} \qquad \sigma_m \approx \sigma_z = 0\ \text{MPa}$$

Použijeme-li vztahy pro momentovou skořepinu, měli bychom v místě neovlivněném vetknutím dostat podobnou hodnotu σ_t jako výše:

$\sigma_z = \frac{n_z}{h} \pm \frac{6 m_z}{h^2}$ $\qquad n_z = 0$ a m_z pro $z \to \infty$ jde k 0.

$\sigma_z \doteq 0\ \text{MPa}$

$\sigma_t = \frac{n_t}{h} \pm \frac{6 m_t}{h^2}$ $\qquad m_t \to 0$ pro $z \to \infty$

$n_t = p \cdot r\,[1 - \underbrace{e^{-\beta z}(\sin\beta z + \cos\beta z)}_{\text{pro } z\to\infty:\ 0}]$ (viz bod 7)

potom n_t pro $z \to \infty = \underline{p \cdot r}$ - což odpovídá membránové napjatosti

$$\sigma_t = \frac{p \cdot r}{h} + \frac{0}{h^2} = \underline{\underline{\frac{p \cdot r}{h}}}$$

, tady σ_t odpovídá σ_t určenému výše pro bezmomentovou skořepinu.

$$\sigma_t = \frac{0{,}9 \cdot 100}{4} = \underline{\underline{22{,}5\ MPa}}$$

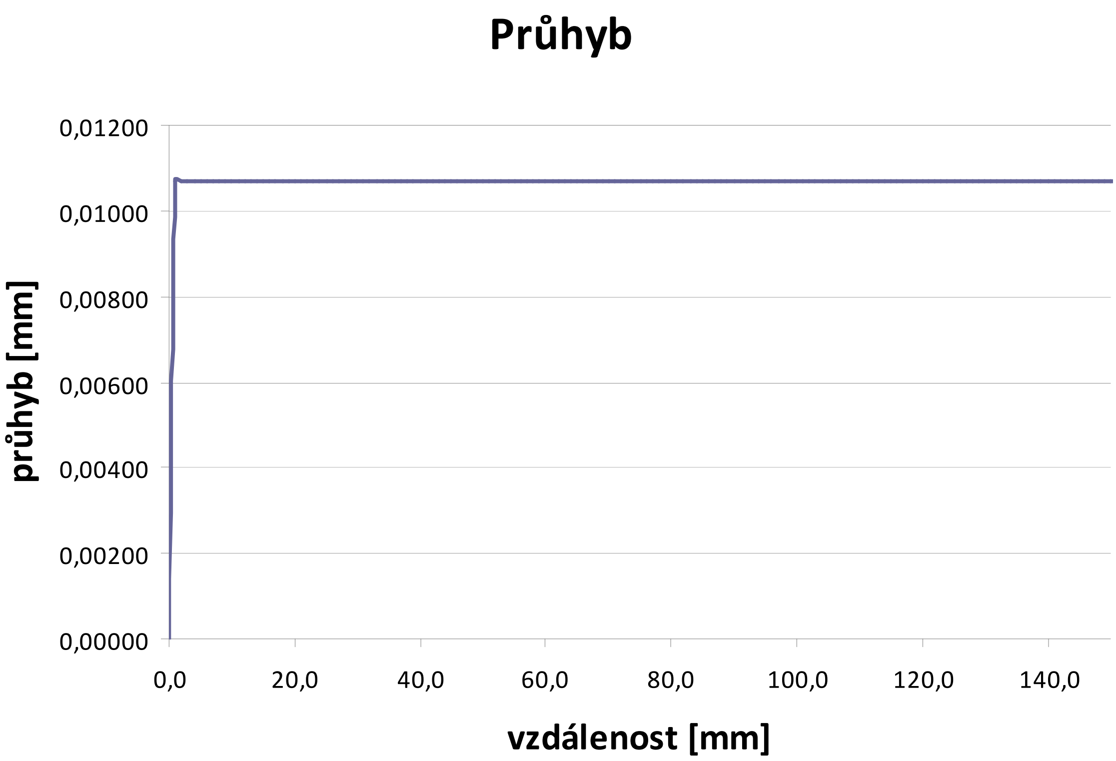
; $\sigma_n \doteq p$

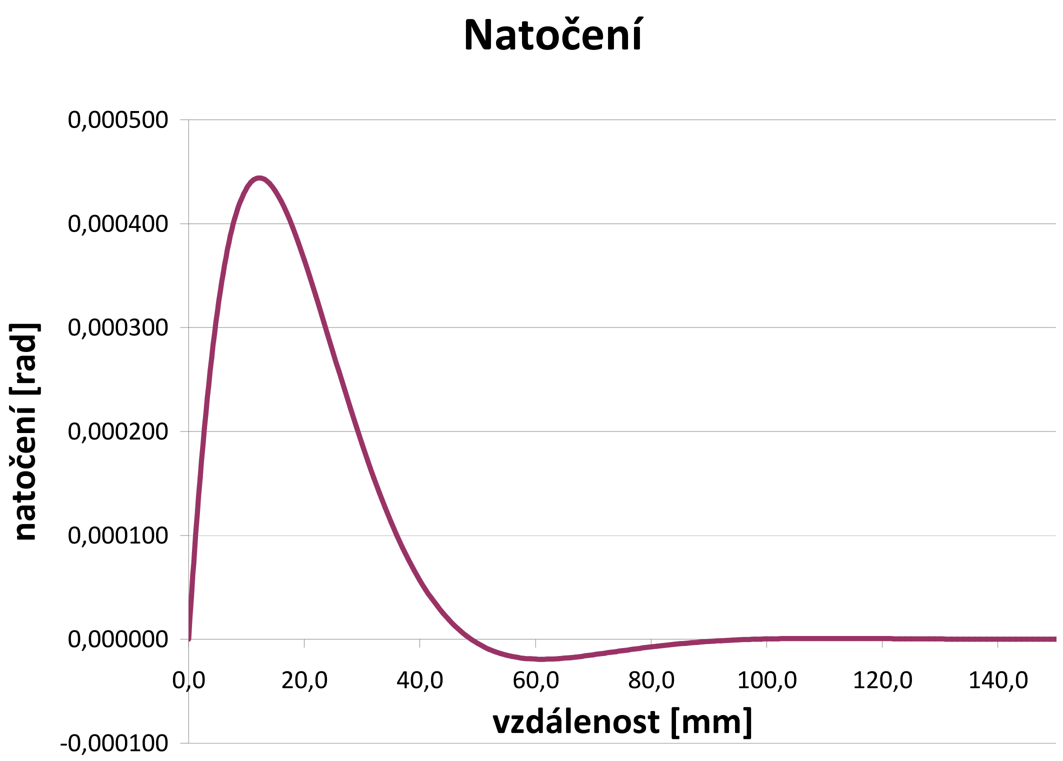
$$\sigma_{red}(MAX\,\tau) = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - (-p) = 22{,}5 + 0{,}9 = \underline{\underline{23{,}4\ MPa}}$$

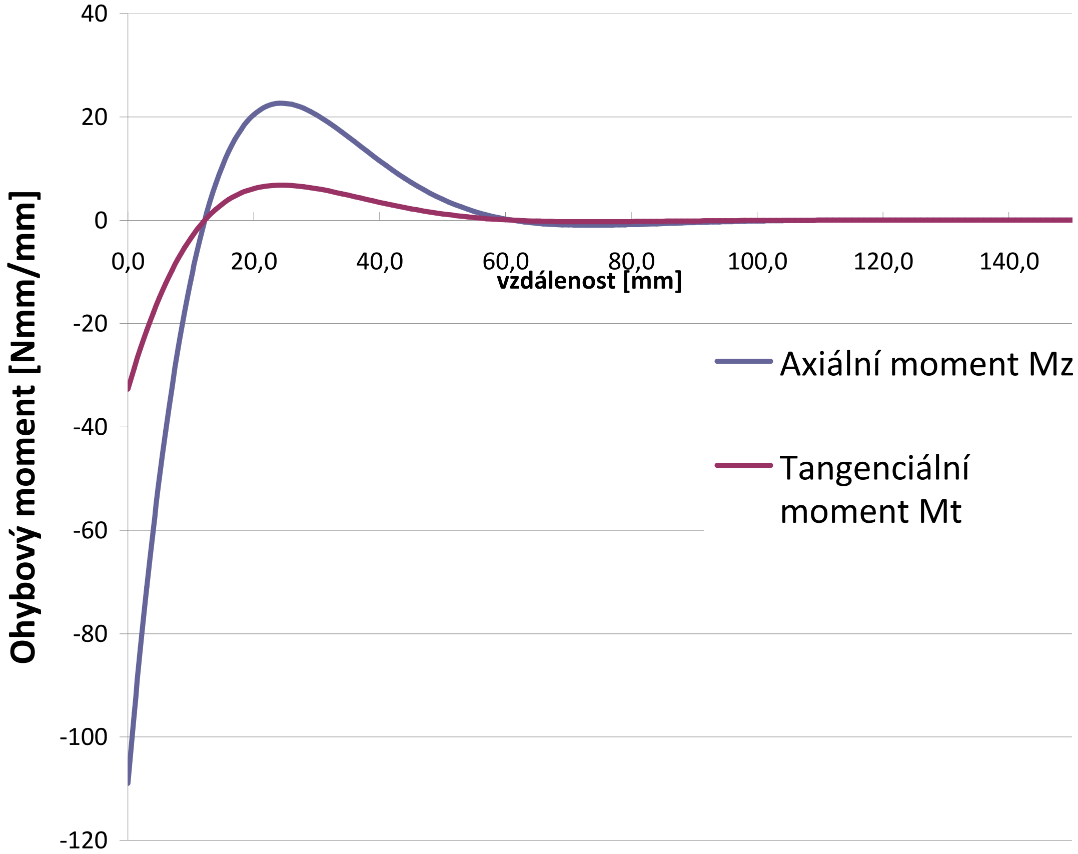
$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red}}$$

Z výpočtu je zřejmé, že maximální zatížení trubky je v místě vetknutí (navaření přírub), proto budeme momentové skořepiny dimenzovat v tomto místě.

Průběhy radiálního posunutí, natočení střednice a ohybových momentů v závislosti na axiální vzdálenosti od příruby







Uvedené veličiny mají cyklický průběh s délkou periody z_p jež se dá určit ze vztahu:

$$\beta z_p = 2\pi$$

$$\Rightarrow z_p = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0,06427} \doteq 98mm$$

Zpracováno na základě podkladů p. Jakuba Cejpka (3B/11) ve formátu MS Excel