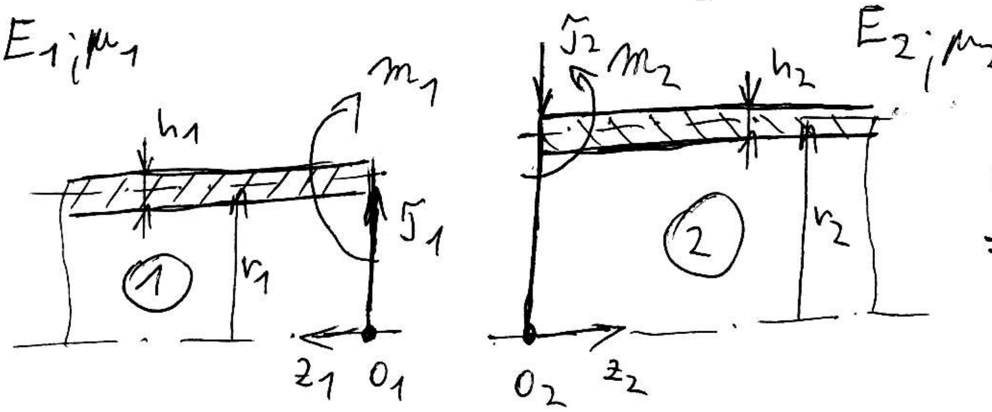
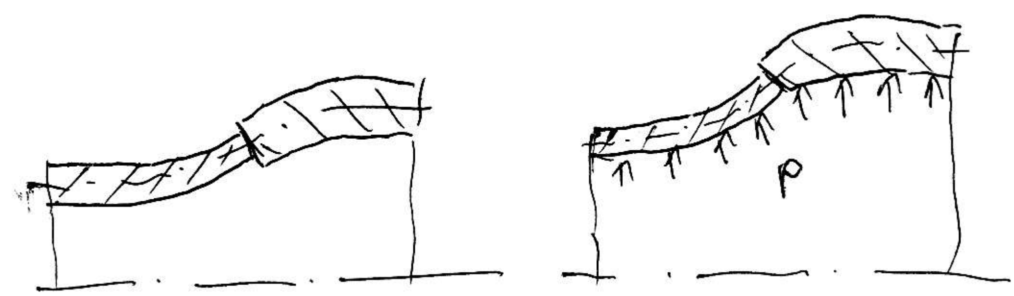
Př.: Dvě různé trubky podle obrázku se mají spojit do nerozebíratelného spoje a zatížit vnitřním tlakem p. Provedťe rozbor napjatosti v blízkém okolí spoje v montážním a provozním stavu. Uvažujte trubky jako dlouhé skořepiny.



$$r_2 - r_1 = \Delta r$$

A) Montážní stav B) Provozní stav



A) Montážní stav – nepůsobí vnitřní tlak p.

OP: Počítáme 2 dlouhé skořepiny, budeme potřebovat 4 OP.

1) $z_1 = z_2 = 0$: $\quad u_1(z_1=0) = u_2(z_2=0) + \Delta r$

2) $\quad \vartheta_1(z_1=0) = \vartheta_2(z_2=0)$

3) $\quad T_1(z_1=0) = -T_2(z_2=0)$

4) $\quad m_1(z_1=0) = m_2(z_2=0)$

3), 4) plyne ze zákonu akce a reakce

Velikost radiálního posunutí: $p = 0$ při montáži

$$u_1(z_1) = e^{-\beta_1 z_1}\left(C_1^{①} \sin\beta_1 z_1 + C_2^{①} \cdot \cos\beta_1 \cdot z_1\right)$$

← značí těl. ①

$$u_2(z_2) = e^{-\beta_2 z_2}\left(C_1^{②} \cdot \sin\beta_2 z_2 + C_2^{②} \cdot \cos\beta_2 z_2\right)$$

Pro aplikaci OP 2)÷4) budeme potřebovat vztahy:

$$\vartheta = \frac{du}{dz}; \quad T = -B \cdot \frac{d^3u}{dz^3}; \quad m_z = -B\frac{d^2u}{dz^2}$$

Dosadíme do 1. OP:

1) $u_1(z_1=0) = u_2(z_2=0) + \Delta r$

$$e^{-\beta_1\cdot 0}\left(C_1^{(1)}\cdot 0 + C_2^{(1)}\cdot 1\right) = e^{-\beta_2\cdot 0}\cdot\left(C_1^{(2)}\cdot 0 + C_2^{(2)}\cdot 1\right) + \Delta r$$

$$\underline{\underline{C_2^{(1)} = C_2^{(2)} + \Delta r}}$$

a dalších OP:

2) $\varphi_1(z_1=0) = \varphi_2(z_2=0)$

$$\frac{du_1}{dz_1} = -\beta_1\cdot e^{-\beta_1 z_1}\left(C_1^{(1)}\cdot\sin\beta_1 z_1 + C_2^{(1)}\cdot\cos\beta_1 z_1\right) + \cancel{e^{-\beta_1 z_1}} + e^{-\beta_1 z_1}\left(\beta_1\cdot C_1^{(1)}\cdot\cos\beta_1\cdot z_1 - \beta_1 C_2^{(1)}\cdot\sin\beta_1 z_1\right)$$

pro $z_1=0$: $-\beta_1\cdot e^{-\beta_1\cdot 0}\left(C_1^{(1)}\cdot 0 + C_2^{(1)}\cdot 1\right) + e^{-\beta_1\cdot 0}\left(\beta_1\cdot C_1^{(1)}\cdot 1 - \beta_1\cdot C_2^{(1)}\cdot 0\right) = \frac{du}{dz}$

$$\frac{du_1}{dz_1} = \beta_1\cdot\left(C_1^{(1)} - C_2^{(1)}\right)$$

podobně: $\frac{du_2}{dz_2} = \beta_2\left(C_1^{(2)} - C_2^{(2)}\right)$

tedy: $\underline{\underline{\beta_1\cdot\left(C_1^{(1)} - C_2^{(1)}\right) = \beta_2\left(C_1^{(2)} - C_2^{(2)}\right)}}$

3) $m_1(z_1=0) = m_2(z_2=0)$

$$\frac{d^2u_1}{dz_1^2} = 2\cdot\beta_1^2\cdot e^{-\beta z}\left(-C_1^{(1)}\cdot\cos\beta_1 z_1 + C_2^{(1)}\sin\beta_1 z_1 + C_1^{(1)}\sin\beta_1 z_1 + C_2^{(1)}\cos\beta_1 z_1\right)$$

pro $z_1=0$: $\frac{d^2u_1}{dz_1^2} = +2\beta_1^2\cdot e^{-\beta_1\cdot 0}\left(-C_1^{(1)} + C_2^{(1)}\cdot 0 + C_1^{(1)}\cdot 0 + C_2^{(1)}\right) =$

$$= 2\beta_1^2\left(C_2^{(1)} - C_1^{(1)}\right)$$

podobně $\frac{d^2u_2}{dz_2^2} = 2\beta_2^2\left(C_2^{(2)} - C_1^{(2)}\right)$ $\qquad m_z = -B\cdot\frac{d^2w}{dz^2}$

tedy: $\underline{\underline{B_1\cdot\beta_1^2\left(C_1^{(1)} - C_2^{(1)}\right) = B_2\cdot\beta_2^2\left(C_1^{(2)} - C_2^{(2)}\right)}}$

4) $T_1(z_1=0) = -T_2(z_2=0)$

$$\frac{d^3u_1}{dz^3} = 4\cdot\beta_1^3\cdot e^{-\beta_1\cdot z_1}\cdot\left(C_1^{(1)}\cdot\cos\beta_1 z_1 - C_2^{(1)}\sin\beta_1\cdot z_1\right)$$

pro $z_1 = 0$: $\frac{d^3u_1}{dz^3} = 4\beta_1^3\cdot e^{-\beta_1\cdot 0}\cdot\left(C_1^{(1)}\cdot 1 - C_2^{(1)}\cdot 0\right)$

$$T = -B\cdot\frac{d^3u}{dz^3}$$

potom: $-B_1\cdot 4\beta_1^3\cdot C_1^{(1)} = B_2\cdot 4\cdot\beta_2^3\cdot C_1^{(2)}$

$$\underline{\underline{-B_1\cdot\beta_1^3\cdot C_1^{(1)} = B_2\cdot\beta_2^3\cdot C_1^{(2)}}}$$

Z rovnic 1)÷4) sestavíme soustavu rovnic:

$$C_2^{(1)} - C_2^{(1)} - \Delta r = 0$$
$$\beta_1\cdot\left(C_1^{(1)} - C_2^{(1)}\right) - \beta_2\left(C_1^{(2)} - C_2^{(2)}\right) = 0$$
$$B_1\cdot\beta_1^2\left(C_1^{(1)} - C_2^{(1)}\right) - B_2\cdot\beta_2^2\left(C_1^{(1)} - C_2^{(1)}\right) = 0$$
$$B_1\cdot\beta_1^3\cdot C_1^{(1)} + B_2\cdot\beta_2^3\cdot C_1^{(2)} = 0$$

kde:

$$\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu_1^2)}{r_1^2\cdot h_1^2}}$$
$$\beta_2 = \dots$$
$$B_1 = \frac{E_1\cdot h_1^3}{12(1-\mu_1^2)}$$
$$B_2 = \dots$$

Jejichž vyřešením určíme neznámé konstanty $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_1^{(2)}$ a $C_2^{(2)}$. Ze znalosti konstant následně určíme složky napětí viz předchozí příklad.

B) Provozní stav – působí vnitřní tlak p

Okrajové podmínky jsou stejné jako v případě A)

změní se pouze vztahy pro radiální posunutí:

$$u_1(z_1) = e^{-\beta_1 z_1}\cdot\left(C_1^{(1)}\cdot\sin\beta_1 z_1 + C_2^{(1)}\cos\beta_1\cdot z_1\right) + \frac{p r_1^2}{E_1 h_1}$$
$$u_2(z_2) = e^{-\beta_2 z_2}\cdot\left(C_1^{(2)}\cdot\sin\beta_2 z_2 + C_2^{(2)}\cos\beta_2\cdot z_2\right) + \frac{p r_2^2}{E_2 h_2}$$

Další postup je identický s předchozím případem