Těžiště

Def.: 1. Na základě stat. rovnováhy:

„Těleso vázané v těžišti je v každé poloze ve statické rovnováze".

2. Na základě statické ekvivalence:

„Těžištěm prochází výslednice elementárních tíhových sil."

$$\underline{\underline{x_T}} = \frac{\int_\Omega x \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{\int_\Omega \rho \cdot g \, dV} \overset{g=konst.}{=} \underline{\underline{\frac{\int_\Omega x \rho \, dV}{\int_\Omega \rho \, dV}}} \overset{\rho=konst.}{=} \frac{\int_\Omega x \, dV}{\int_\Omega dV}$$

$$\underline{\underline{y_T}} = \underline{\underline{\frac{\int_\Omega y \rho \, dV}{\int_\Omega \rho \, dV}}} \qquad z_T = \dots$$

kde: ρ ... hustota materiálu
g ... gravitační konst.
dV ... element objemu tělesa
x_T, y_T, z_T ... souř. těžiště

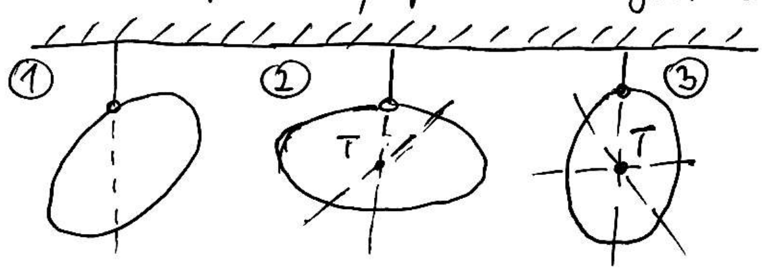
Poznámka: $\int_\Omega \rho \, dV = m$

Určení těžiště tělesa složeného z elementárních těles (určení těžiště složených těles):

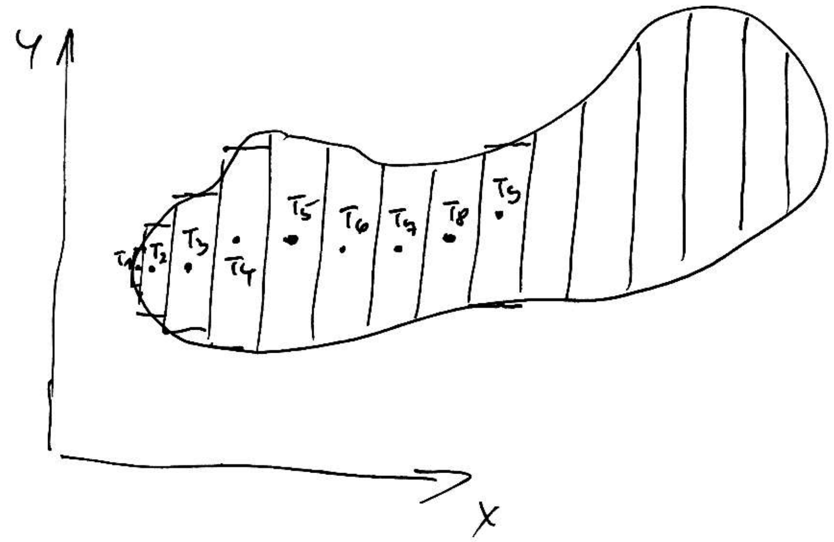
$$\underline{\underline{x_T = \frac{\sum x_{Ti} \cdot m_i}{m}}} \qquad y_T = \dots \qquad z_T = \dots$$

Poznámka: Pokud je těleso symetrické podle osy (roviny), potom se těžiště nachází na této ose (rovině).

Poznámka: Experimentální určení těžiště: např. zavěšením tělesa postupně na různých místech, čímž získáme přímky procházející těžištěm



Poznámka: Zjišťování polohy těžiště za pomoci integrálního výpočtu může být v řadě případů problematické či nepraktické. S výhodou lze využít rozdělení komplikovaného tělesa na jednoduchá tělesa u nichž známe polohu těžiště.



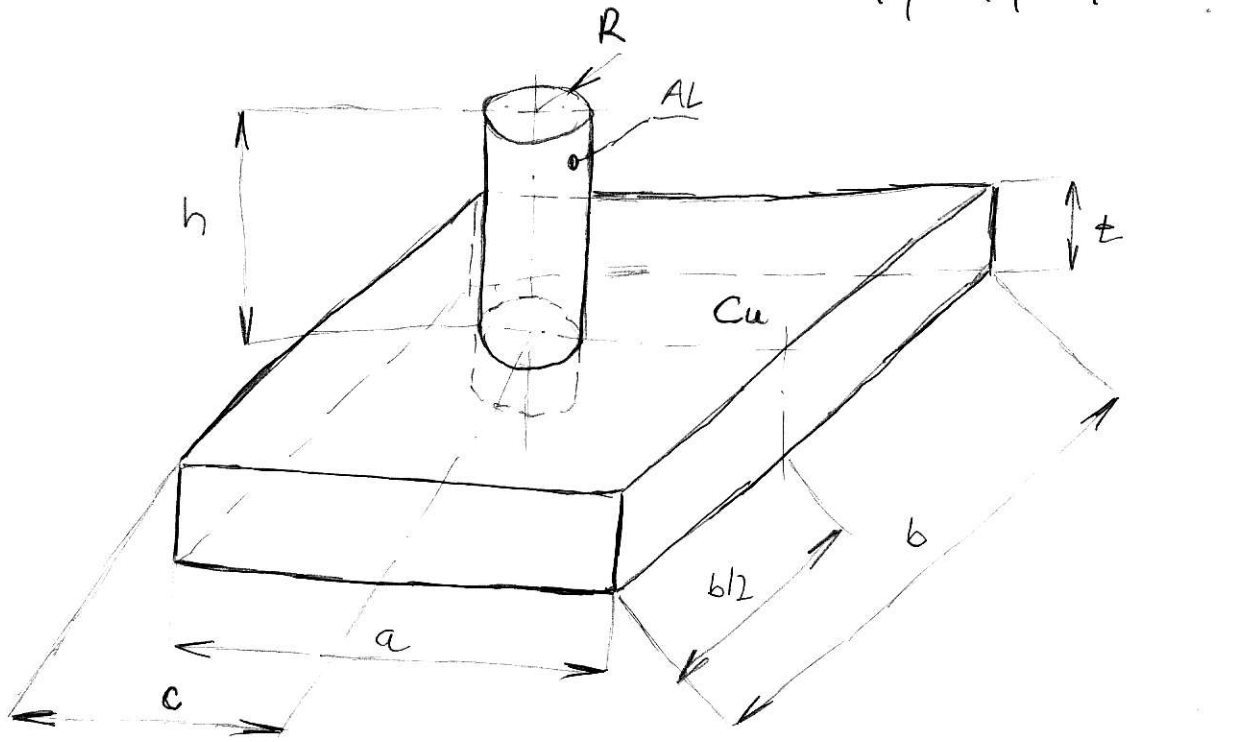
Ke zjištění těžiště pak můžeme využít výše uvedené vztahy. Podobné postupy se využívají i v případě využití výpočetní techniky.

Poznámka ke zkoušce (platí pro letní sem. 2009/2010)

Pokud bude příklad na výpočet těžiště u zkoušky, bude se jednat o těleso jenž lze rozdělit na 3-5 elementárních těles, viz např. 2. a 3. ~~při~~ z následujících příkladů. Pro teoretický test je nutné znát i integrální vztahy!

Příklad: Určete těžiště tělesa dle obrázku příkladu ke zkoušce

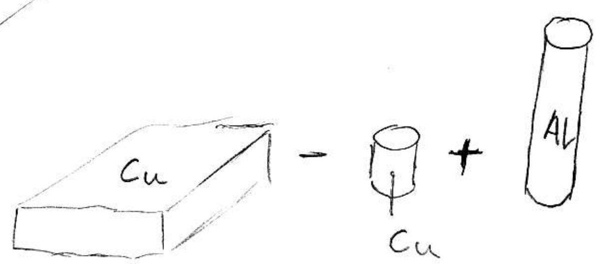
$x_T;\ y_T;\ z_T = ?$



$a = 2{,}7\,m$ $\quad R = 0{,}5\,m$

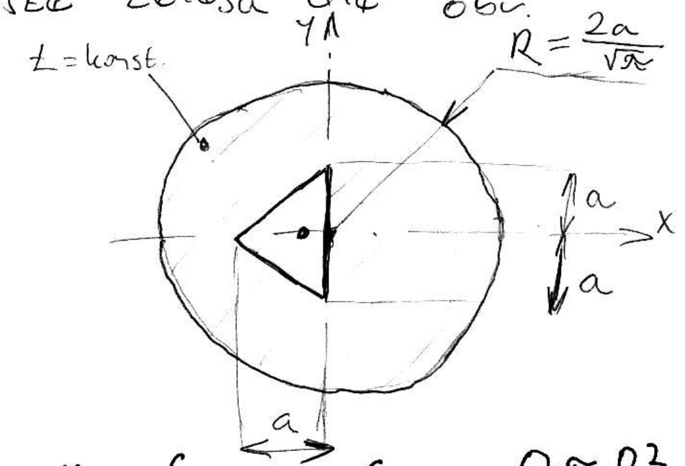
$h = 1{,}8\,m$ $\quad c = 1\,m$

$t = 1\,m$ $\quad b = 5\,m$



Př: Určete těžiště tělesa dle obr. $\boxed{1}$

$\rho = \text{konst}$



$x_T;\ y_T = ?$

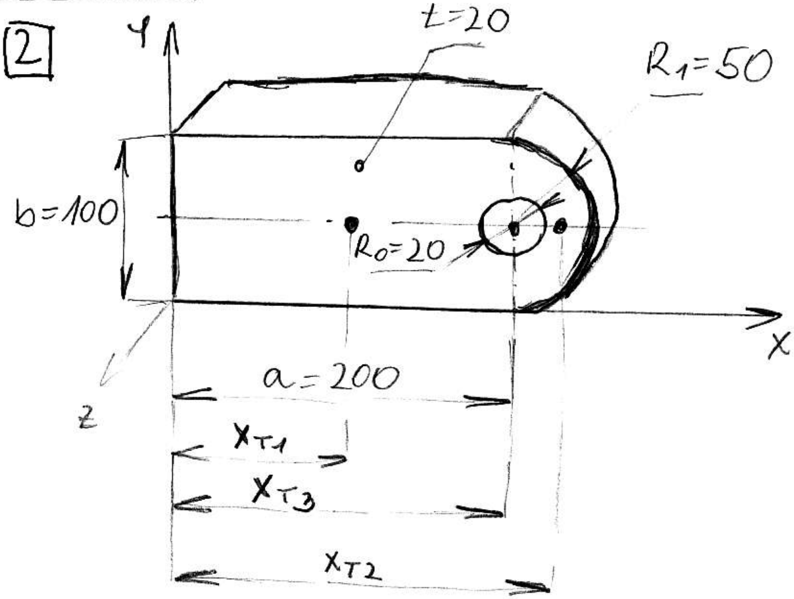
$\underline{Y_T = 0 \text{ (x je osa sym.)}}$

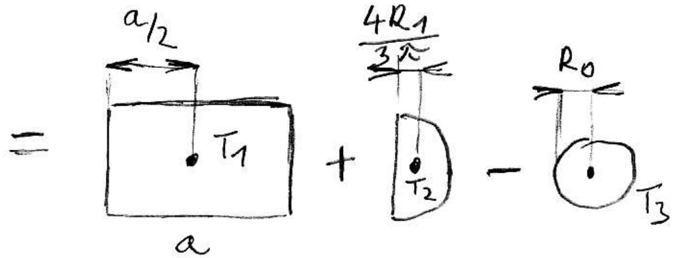
$$x_T = \frac{\sum x_{T_i} \cdot S_i}{\sum S_i} = \frac{x_{T⊚} \cdot S_{⊚} - x_{T\blacktriangle} \cdot S_{\blacktriangle}}{S_{⊚} - S_{\blacktriangle}} = \frac{0 \cdot \pi \cdot R^2 - \left(-\frac{1}{3} a \frac{a^2 \cdot 2}{2}\right)}{\pi R^2 - a^2} =$$

$$= \frac{a^3}{3(\pi R^2 - a^2)} = \frac{a^3}{3 \cdot \left(\pi \left(\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\right)^2 - a^2\right)} = \frac{a^3}{3 \cdot \left(\pi \cdot \frac{4a^2}{\pi} - a^2\right)} = \underline{\underline{\frac{a}{9}}}$$

Příklad: Určete těžiště tělesa dle obr.

$\boxed{2}$





$\rho = konst.$

$t = konst.$

$$x_T = \frac{\sum x_{T_i} \cdot m_i}{m} = \frac{\sum x_{T_i} \cdot S_i}{S} = \frac{x_{T1} \cdot S_1 + x_{T2} \cdot S_2 - x_{T3} \cdot S_3}{S_1 + S_2 - S_3} =$$

$$= \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot b + \left(a + \frac{4R_1}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi \cdot R_1^2}{2} - a \cdot \pi \cdot R_0^2}{a \cdot b + \frac{\pi \cdot R_1^2}{2} - \pi \cdot R_0^2}$$

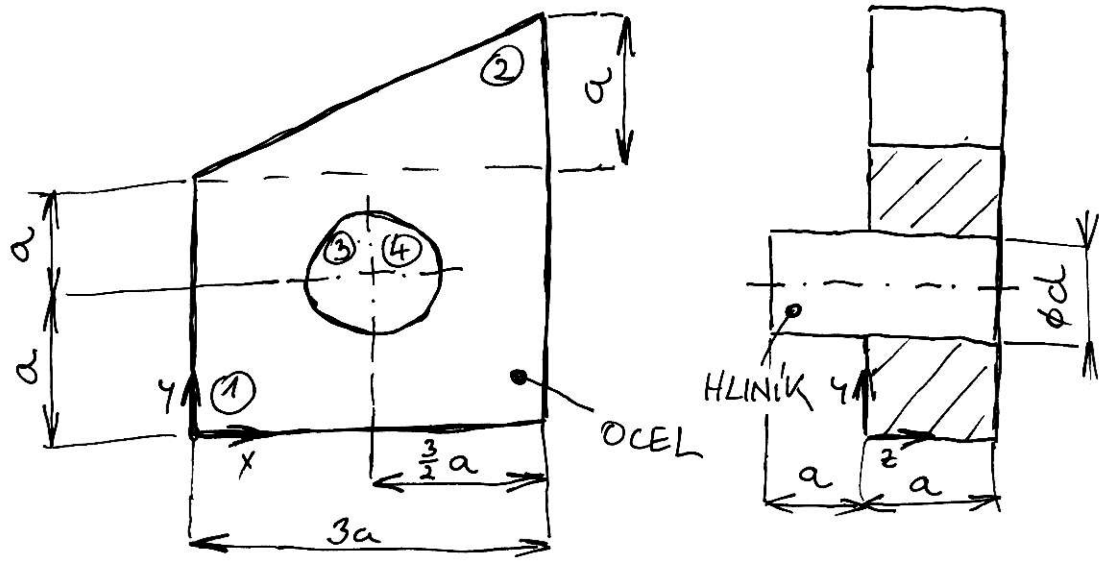
$$\underline{\underline{x_T}} = \frac{\frac{200}{2} \cdot 200 \cdot 100 + \left(200 + \frac{4 \cdot 50}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi \cdot 50^2}{2} - 200\pi \cdot 20^2}{200 \cdot 100 + \frac{\pi \cdot 50^2}{2} - \pi \cdot 20^2} = \underline{\underline{115{,}5\ mm}}$$

$$\underline{\underline{y_T = \frac{b}{2} = 50\,mm}}$$

$$\underline{\underline{z_T = -\frac{t}{2} = -10\,mm}}$$

Př.: Určiť ťažisko telesa. Známe ρ_{AL}; ρ_{OCEL}; a; ϕd

$\boxed{3}$



Oceľové teleso do ktorého je naražený hliníkový kolík.

1) Rozdelíme teleso na jednoduchšie geom. tvary:

① kváder ; ② trojuholník ; ③ otvor v oc. doske ; ④ hliníkový kolík

$$V_{①} = 3a \cdot 2a \cdot a = 6a^3 \; ; \; V_{②} = 3a \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{3}{2}a^3$$

$$V_{③} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot a \; ; \; V_{④} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 2a = \frac{\pi \cdot d^2 a}{2}$$

Schéma výpočtu: $\square + \triangle - \text{OCEL} + \text{AL}$

Súradnice ťažísk al. telies:

	$\square$	$\triangle$	OCEL	AL
X_T:	$\frac{3}{2}a$	$2a$	$\frac{3}{2}a$	$\frac{3}{2}a$
Y_T:	a	$\frac{7}{3}a$	a	a
Z_T:	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	ϕ

$$X_T = \frac{\sum \rho_i \cdot x_{T_i} \cdot V_i}{\sum \rho_i \cdot V_i} = \frac{\rho_{OCEL} \cdot \frac{3}{2}a \cdot 6a^3 + \rho_{OCEL} \cdot 2a \cdot \frac{3}{2}a^3 - \rho_{OCEL} \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot a + \rho_{AL} \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{\pi d^2}{2} a}{\rho_{OCEL} \cdot 6a^3 + \rho_{OCEL} \cdot \frac{3}{2}a^3 - \rho_{OCEL} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot a + \rho_{AL} \cdot \frac{\pi d^2}{2} a} = \\ = \ldots$$

$$Y_T = \frac{\sum \rho_i \cdot y_{T_i} \cdot V_i}{\sum \rho_i \cdot V_i} = \frac{\rho_{OCEL} \cdot a \cdot 6a^3 + \rho_{OCEL} \cdot \frac{7}{3}a \cdot \frac{3}{2}a^3 - \rho_{OCEL} \cdot a \cdot \frac{\pi d^2}{4} a + \rho_{AL} \cdot a \cdot \frac{\pi d^2}{2} a}{\rho_{OCEL} \cdot 6a^3 + \rho_{OCEL} \cdot \frac{3}{2}a^3 - \rho_{OCEL} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot a + \rho_{AL} \cdot \frac{\pi d^2}{2} \cdot a} = \\ = \ldots$$

$$Z_T = \frac{\sum \rho_i \, z_{T_i} \cdot V_i}{\sum \rho_i \cdot V_i} = \ldots$$