Co by jste měli znát po 1. cvičení:

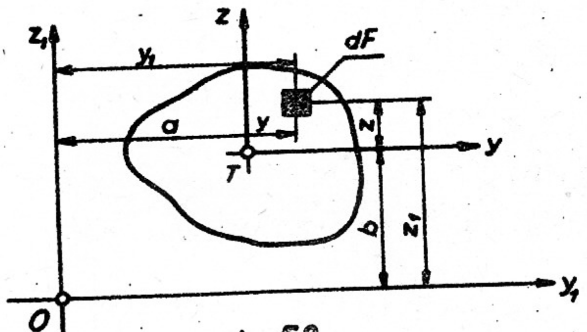
- znát průřezové charakteristiky: plochu průřezu, lineární momenty průřezu, kvadratické momenty průřezu (osové, polární, deviační) , poloměry osových kvadratických momentů, průřezové moduly (v ohybu a v krutu), těžiště průřezu
- znát základní vlastnosti kvadratických momentů průřezu
- dokázat analyticky určit průřezové charakteristiky jednoduchých průřezů (kruh, obdélník, trojúhelník, mezikruží, atd.) a z nich složených složitějších průřezů – např. I-profilu
- znát postup určení průřezových charakteristik komplikovanějších průřezů, např. profilu křídla letadla

Z časových důvodů nebude na cvičení předvedeno odvození transformačních vztahů pro určení kvadratických momentů k posunutým a pootočeným osám souřadného systému, nicméně doporučuji, ze cvičných důvodů, se na toto odvození podívat:

Další text je převzat z Farlík, A.: Pružnost a pevnost I, VUT v Brně, 1961, str. 67 – 71.

4. Momenty setrvačnosti k osám rovnoběžným--Steinerova věta.

Mějme obecnou rovinnou plochu/obr.53/ u níž již známe polohu těžiště. Těžištěm vedeme centrální osy y, z a rovnoběžně pak s těmito osami vedeme osy y_1 , z_1 , k nimž hledáme momenty setrvačnosti.



obr. 58.

Moment setrvačnosti k centrální ose $\underline{y}$ je:

$$J_y = \int_0^F z^2 dF$$

Moment setrvačnosti k ose $\underline{y_1}$, s ní rovnoběžné je:

$$J_{y_1} = \int_0^F z_1^2 dF$$

Z náčrtu je patrno: $z_1 = z + b$, čili $J_{y_1} = \int_{(F)} (z+b)^2 dF = \int_{(F)} (z^2 + 2zb + b^2) dF =$

$= \int_{(F)} z^2 dF + \int_{(F)} 2bz dF + b^2 \int_{(F)} dF$

První integrál

$$\int_{(F)} z^2 dF = J_y$$

Druhý integrál $2b \int_{(F)} z dF = 0$, protože hodnota $\int_{(F)} z dF = 0$, neboť vyjadřuje statický moment plochy k ose procházející těžištěm.

Třetí integrál $b^2 \int_{(F)} dF = b^2 F$

Lze tedy psát: $J_{y_1} = J_y + b^2 F$ což je Steinerova věta. /III.4./

Slovy: Moment setrvačnosti rovinné plochy k ose rovnoběžné s centrální osou se rovná součtu momentu setrvačnosti plochy k centrální ose a součinu plochy obrazce a čtverce vzdálenosti obou os.

Z tohoto odvození plyne, že máme-li soustavu rovnoběžných os, je moment setrvačnosti plochy k centrální ose nejmenší. Jestliže máme naopak počítat moment setrvačnosti k centrální ose rovnoběžné s osou která těžištěm neprochází a k níž známe moment setrvačnosti, použijeme vztahu:

$$J_y = J_{y_1} - b^2 F$$

Obdobně odvodíme výrazy pro momenty setrvačnosti k osám $\underline{z}$ a $\underline{z_1}$.

$$J_{z_1} = J_z + a^2 F$$

$$J_z = J_{z_1} - a^2 F$$

Stejným postupem odvodíme Steinerovu větu pro deviační momenty k osám rovnoběžným s centrálními osami.

Deviační moment k centrálním osám y, z je

$$J_{yz} = \int_{(F)} yz dF$$

Deviační moment k osám $\underline{y_1}, \underline{z_1}$ je

$$J_{y_1 z_1} = \int_{(F)} y_1 z_1 dF$$

Z obrázku je patrno, že $y_1 = y + a$; $z_1 = z + b$

Pak $J_{y_1 z_1} = \int_{(F)} (y+a)(z+b)\,dF = \int_{(F)} yz\,dF + a\int_{(F)} z\,dF + b\int_{(F)} y\,dF + ab\int_{(F)} dF = J_{yz} + abF$ /III.5./

Neboť opět platí:

$$\int_{(F)} z\,dF = \int_{(F)} y\,dF = 0$$

Platí tedy s obdobou Steinerova věta i pro deviační momenty.

$$J_{y_1 z_1} = J_{yz} + abF \quad ; \quad J_{yz} = J_{y_1 z_1} - abF \qquad /III.6/$$

Steinerovy věty se s výhodou použije při vyšetřování deviačních momentů setrvačnosti průřezů, neboť věta /III.6/ říká, že deviační moment k osám rovnoběžným s centrálními osami je roven součtu deviačního momentu plochy k centrálním osám a součinu plochy a souřadnic těžiště plochy v souřadné soustavě os rovnoběžných s centrálními osami.

Z výše uvedeného je patrno, že odvozených vztahů možno použít jen pro dvě osy, z nichž jedna prochází těžištěm. Někdy však známe moment J'_y k ose y', vzdálené o délku b_1 od těžiště a hledáme moment setrvačnosti k rovnoběžné ose y'' ve vzdálenosti b_2 od těžiště.

Nazveme-li moment setrvacnosti k ose procházející těžištěm J_y a je-li plocha průřezu F, je:

$$J'_y = J_y + Fb_1^2$$

$$J''_y = J_y + Fb_2^2$$

a po odečtení

$$J''_y - J'_y = F(b_2^2 - b_1^2)$$

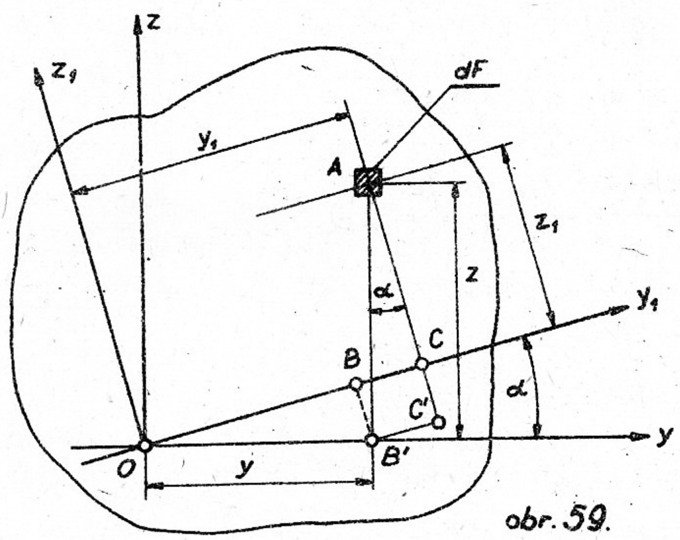
Po úpravě vychází v explicitní formě

$$J''_y = J'_y + F(b_2^2 - b_1^2)$$

5. Momenty setrvačnosti k osám pootočeným.

Výpočet provedem opět na obecném obrazci /obr.59/ za předpokladu, že známe J_y, J_z, J_{yz}. Máme určit J_{y_1}, J_{z_1}, $J_{y_1 z_1}$ tj. momenty setrvačnosti k pootočeným osám navzájem kolmým.

Pro osy y, z $\quad J_y = \int_{(F)} z^2\,dF$, $\quad J_z = \int_{(F)} y^2\,dF$, $\quad J_{yz} = \int_{(F)} yz\,dF$



obr. 59.

Pro osy y_1 , z_1

$$J_{y_1} = \int_{(F)} z_1^2 \, dF$$

$$J_{z_1} = \int_{(F)} y_1^2 \, dF$$

$$J_{y_1 z_1} = \int_{(F)} y_1 z_1 \, dF$$

Z /obr.59/je zřejmo:

$$y_1 = \overline{OB} + \overline{BC} = y\cos\alpha + z\sin\alpha$$

Po dosazení dostáváme:

$$z_1 = \overline{AC'} - CC' = z\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$J_{y_1} = \int_{(F)} z_1^2 dF = \int_{(F)} (z\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 dF = \int_{(F)} (z^2\cos^2\alpha - 2zy\sin\alpha\cos\alpha + y^2\sin^2\alpha) dF =$$

$$= \cos^2\alpha \int_{(F)} z^2 dF + \sin^2\alpha \int_{(F)} y^2 dF - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_{(F)} yz\,dF = \underline{\underline{J_y\cos^2\alpha + J_z\sin^2\alpha - J_{yz}\sin 2\alpha}}$$

/III.7./

$$J_{z_1} = \int_{(F)} y_1^2 dF = \int_{(F)} (y\cos\alpha + z\sin\alpha)^2 dF = \int_{(F)} (y^2\cos^2\alpha + z^2\sin^2\alpha + 2yz\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= \cos^2\alpha \int_{(F)} y^2 dF + \sin^2\alpha \int_{(F)} z^2 dF + 2\sin\alpha\cos\alpha \int_{(F)} yz\,dF = \underline{\underline{J_y\sin^2\alpha + J_z\cos^2\alpha + J_{yz}\sin 2\alpha}}$$

/III.8./

$$J_{y_1 z_1} = \int_{(F)} y_1 z_1 dF = \int_{F} (y\cos\alpha + z\sin\alpha)(z\cos\alpha - y\sin\alpha) dF =$$

$$= \int_{(F)} (yz\cos^2\alpha + z^2\sin\alpha\cos\alpha - y^2\sin\alpha\cos\alpha - yz\sin^2\alpha) dF =$$

$$= J_{yz}\cos^2\alpha + J_y\sin\alpha\cos\alpha - J_z\sin\alpha\cos\alpha - J_{yz}\sin^2\alpha =$$

$$\underline{\underline{= \frac{J_y - J_z}{2}\sin 2\alpha + J_{yz}\cos 2\alpha}}$$

/III.9./

Je patrno, že odvozené výrazy platí i pro osy, které neprocházejí těžištěm.

Proveďme součet: $J_{y_1} + J_{z_1}$

$$J_{y_1} = J_y \cos^2\alpha + J_z \sin^2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$\underline{J_{z_1} = J_y \sin^2\alpha + J_z \cos^2\alpha + J_{yz} \sin 2\alpha}$$

$$J_{y_1} + J_{z_1} = J_y(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + J_z(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$\underline{\underline{J_{y_1} + J_{z_1} = J_y + J_z = \text{konst.} = J_p}}$$

Hodnota této konstanty se podle předcházejícího vzorce /III.3/ rovná polárnímu momentu setrvačnosti k bodu, který je počátkem soustavy.