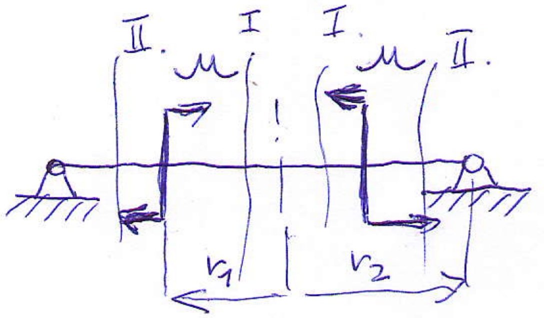
Př.: Deska - okrajové podmínky + určení konstant

A)

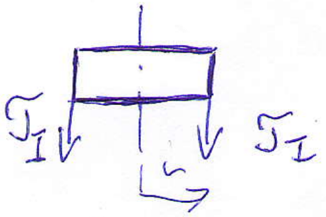


$\mathcal{M}$ ... liniový moment

Skokově se mění zatížení proto pro VVÚ rozdělíme na 2 úseky.

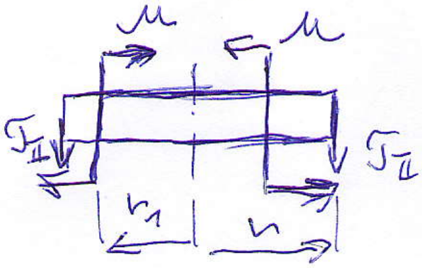
Stanovíme velikost posouvajících sil pro jednotlivé úseky. Tyto hodnoty (nebo funkce) potřebujeme pro určení partikulární části řešení.

I.



$\boxed{SR}: \; T_I \cdot 2\pi r = 0 \Rightarrow \underline{\underline{T_I = 0}}$

II.



$\boxed{SR}: \; T_{II} \cdot 2\pi r = 0 \Rightarrow \underline{\underline{T_{II} = 0}}$

OP:
$r = 0: \; \vartheta_I = 0 \Rightarrow C_2^I = 0$
$r = r_1: \; m_r^I = m_r^{II} + \mathcal{M} \Rightarrow m_r^I - m_r^{II} - \mathcal{M} = 0$
$r = r_1: \; \vartheta_I = \vartheta_{II} \Rightarrow \vartheta_I - \vartheta_{II} = 0$
$r = r_2: \; m_r^{II} = 0$
$r = r_2: \; w_{II} = 0$
$r = r_1: \; w_I = w_{II} \Rightarrow w_I - w_{II} = 0$

6 OP pro 6 neznámých $C_1^I; C_2^I; C_3^I$ pro I. úsek a $C_1^{II}; C_2^{II}; C_3^{II}$ pro II. úsek

obecně: $\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \vartheta_p$

$w = \int \vartheta \, dr$

$m_r = -B\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r}\right)$

$\vartheta_p = -\frac{1}{rB}\int r\left[\int T(r)\,dr\right]dr$

$B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$

v našem případě: $T_I = T_{II} = 0 \Rightarrow \vartheta_{pI} = \vartheta_{pII} = 0$

$\frac{d\vartheta_I}{dr} = C_1^I; \; \frac{\vartheta_I}{r} = C_1^I$

$\underline{\vartheta_I = C_1^I r}$

$\vartheta_{II} = C_1^{II} r + \frac{C_2^{II}}{r}$

$\frac{d\vartheta_{II}}{dr} = C_1^{II} - \frac{C_2^{II}}{r^2}; \; \frac{\vartheta_{II}}{r} = C_1^{II} + \frac{C_2^{II}}{r^2}$

$$m_r^{I} = -B\left(C_1^{I} + \mu C_1^{I}\right)$$

$$m_r^{II} = -B\left(C_1^{II} - \frac{C_2^{II}}{r^2} + \mu\left(C_1^{II} + \frac{C_2^{II}}{r^2}\right)\right) =$$

$$= -B\left[C_1^{II}(1+\mu) + \frac{C_2^{II}}{r^2}(\mu - 1)\right]$$

Nyní by jsme řešili 6 r. o 6ti neznámých, nicméně z 1. OP již víme, že $C_2^{I} = 0$, tedy zbývá určit již jen 5 neznámých ze soustavy rovnic tvořené OP 2.-6. Po dosazení tedy:

2) $-B\left(C_1^{I} + \mu C_1^{I}\right) + B\left[C_1^{II}(1+\mu) + \frac{C_2^{II}}{r_1^2}(\mu-1)\right] - \mathcal{M} = 0$

3) $C_1^{I} r_1 - C_1^{II} r_1 - \frac{C_2^{II}}{r_1} = 0$

4) $-B\left[C_1^{II}(1+\mu) + \frac{C_2^{II}}{r_2^2}(\mu-1)\right] = 0$

5)* $C_1^{II}\frac{r_2^2}{2} + C_2^{II}\ln|r_2| + C_3^{II} = 0$

6)** $C_1^{I}\frac{r_1^2}{2} + C_3^{I} - C_1^{II}\frac{r_1^2}{2} - C_2^{II}\ln|r_1| - C_3^{II} = 0$

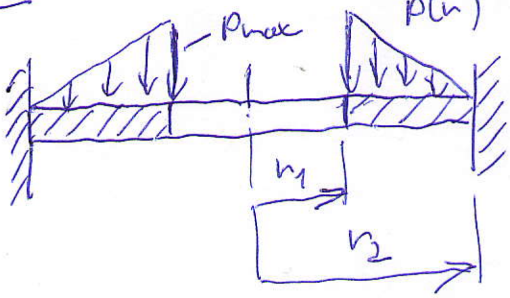
** $w = \int v\,dr$; $w_I = \int v_I\,dr = C_1^{I}\frac{r^2}{2} + C_3^{I}$

* $w_{II} = \int v_{II}\,dr = \int\left(C_1^{II} r + \frac{C_2}{r}\right)dr = C_1^{II}\frac{r^2}{2} + C_2^{II}\ln|r| + C_3^{II}$

Pozn.: Pokud by jsme nepotřebovali znát průhyb, nepotřebujeme určit konstanty C_3^{I} a C_3^{II} a vystačíme si tedy jen s OP 1.-4.

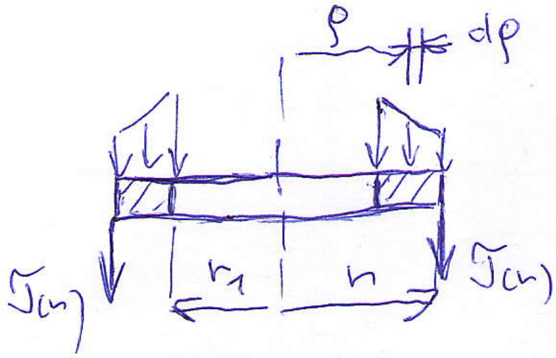
Pozn. 2: Soustavu 5ti rovnic by jsme řešili numericky, nicméně při analytickém řešení si můžeme řešení valně zjednodušit. Stačí vyřešit soustavu 3 rovnic 2)-4), z nich vyplynou C_1^{I}; C_1^{II}; C_2^{II}. Konstanta C_3^{II} pak určíme z r. 5) a C_3^{I} pak z 6)! Tedy není to problém jenž by se nedal zvládnout v časových možnostech zkoušky z PP II :-)

Př.: Deska - okrajové podmínky



$$\frac{p_{max}}{p(r)} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(r) = p_{max} \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}$$



$\boxed{SR}$:

$$\int_{r_1}^{r} 2\pi\rho\, p(\rho)\, d\rho + 2\pi r\, T(r) = 0$$

$$\int_{r_1}^{r} 2\pi\rho\, p(\rho)\, d\rho = \int_{r_1}^{r} 2\pi\, \rho\, p_{max} \frac{r_2 - \rho}{r_2 - r_1}\, d\rho =$$

$$= 2\pi p_{max} \int_{r_1}^{r} \frac{\rho r_2 - \rho^2}{r_2 - r_1}\, d\rho = 2\pi p_{max} \left[\frac{\frac{\rho^2 r_2}{2} - \frac{\rho^3}{3}}{r_2 - r_1} \right]_{r_1}^{r} =$$

$$= \frac{2\pi p_{max}}{r_2 - r_1} \left[\frac{r^2 r_2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{r_1^2 r_2}{2} + \frac{r_1^3}{3} \right]$$

$$T(r) = -\frac{p_{max}}{r(r_2 - r_1)} \left[\frac{r^2 r_2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{r_1^2 r_2}{2} + \frac{r_1^3}{3} \right]$$

OP: $r = r_1$: $m_r = 0$

$r = r_2$: $\vartheta = 0$

$r = r_2$: $w = 0$