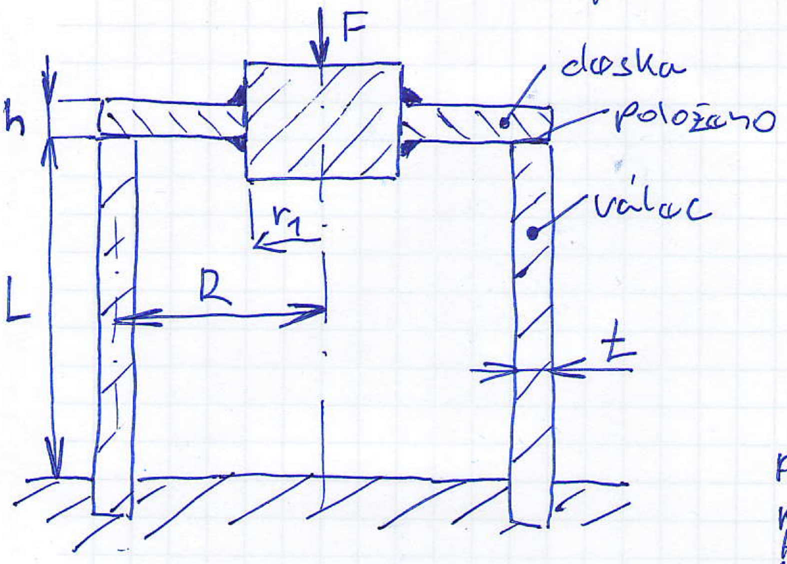
Př.: 1) Určete sílu F, aby bezpečnost vzhledem k m.s. pružnosti v desce a ve válci nebyla < 2.

2) Jaká bude změna průměru válce?



$R = 200$ mm $\quad \sigma_k = 400$ MPa

$r_1 = 50$ mm $\quad k_k = 2$

$L = 500$ mm $\quad E = 2{,}1\cdot 10^5$ MPa

$h = 15$ mm

$t = 10$ mm

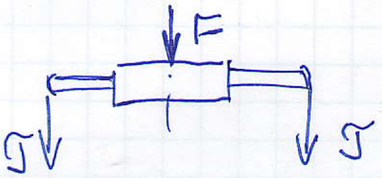
$\mu = 0{,}3$.

Pro desku zatíženou silou F, použijeme analytické řešení Kirchhoffovy desky. Válec budeme uvažovat jako membránovou skořepinu.

deska, ve středu vyztužená a volně položená na válec

Deformaci pro $r\,(0, r_1)$ považujeme za zanedbatelnou.

a) určení posouvající síly a partikulární části řešení ϑ_p



$\boxed{SR}$ $\quad F_z: \quad F + 2\pi r\, T = 0$

$$T = -\frac{F}{2\pi r}$$

$$\vartheta_p = -\frac{1}{rB}\int \left[r \int T(r)\,dr \right] dr = -\frac{1}{rB}\int \left[r\int -\frac{F}{2\pi r}\,dr \right] dr =$$

$$= \frac{F}{2\pi r B}\int \underbrace{r\cdot \ln r\, dr}_{\text{per partes}}$$

opakování: $\int u\, v'\, dx = u\, v - \int u'\, v\, dx$

$$\left| \begin{matrix} u = \ln r & u' = \frac{1}{r} \\ v' = r & v = \frac{r^2}{2} \end{matrix} \right|$$

$$\int r \ln r\, dr = \frac{r^2}{2}\ln r - \int \frac{1}{r}\cdot\frac{r^2}{2}\,dr = \frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}$$

$$\vartheta_p = \frac{F}{2\pi r B}\left(\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right) = \frac{F\cdot r}{4\pi B}\left(\ln r - \frac{1}{2}\right)$$

b) určení part. části w_p

$$w_p = \int \vartheta_p\, dr = \frac{F}{4\pi B}\left(\underbrace{r \ln r}_{\text{per partes}} - \frac{1}{2}r\right) = \frac{F}{4\pi B}\left(\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{F}{4\pi B}\left(\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{F r^2}{8\pi B}\left(\ln r - 1\right)$$

c) určení okrajových podmínek a konstant C_1 a C_2

OP: ① $r = R$: $w = 0$

② $r = r_1$: $\vartheta = 0$ - deska je přivařena k silnější části, která se nedeformuje

③ $r = R$: $m_r = 0$ - volný konec desky, který je pouze opřen o válec (nikoliv přivařen)

obecně: $\vartheta = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} + \vartheta_p$

z ②: $$C_1 \cdot r_1 + \frac{C_2}{r_1} + \frac{F \cdot r_1}{4\pi B}\left(\ln r_1 - \frac{1}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$m_r = -B\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r}\right)$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} + \frac{F}{4\pi B}\left(\ln r - \frac{1}{2} + r\left(\frac{1}{r}\right)\right) \qquad \text{pozn.: } (\ln r)' = \frac{1}{r}$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} + \frac{F}{4\pi B}\left(\ln r + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\vartheta}{r} = C_1 + \frac{C_2}{r^2} + \frac{F}{4\pi B}\left(\ln r - \frac{1}{2}\right)$$

$$\cancel{m_r = -B\left[C_1 - \frac{C_2}{r_1^2} + \frac{F}{4\pi B}\left(\ln r_1 + \frac{1}{2}\right) + \mu\left(C_1 + \frac{C_2}{r}\right.\right.}$$

z ③: $$m_r(r=R) = -B\left[C_1 - \frac{C_2}{R^2} + \frac{F}{4\pi B}\left(\ln R + \frac{1}{2}\right) + \mu\left(C_1 + \frac{C_2}{R^2} + \frac{F}{4\pi B}\left(\ln R - \frac{1}{2}\right)\right)\right] = 0 \qquad (2)$$

z (1) a (2) vyjádříme C_1 a C_2 (pro stručnost zde vynecháno)

d) určení napětí

ze znalosti konstant C_1 a C_2 určíme momenty v nejnamáhanějším místě desky, tj. na r_1.

$$m_r(r=r_1) = -B\left(\frac{d\vartheta}{dr_1} + \mu \frac{\vartheta}{r_1}\right)$$

$$m_t(r=r_1) = -B\left(\frac{\vartheta}{r_1} + \mu \frac{d\vartheta}{dr_1}\right)$$

následně pak napětí:

$$\sigma_{r,ex} = \pm \frac{6 m_r(r=r_1)}{h^2} \qquad 3.\ \text{napětí} \sim 0 = \sigma_3$$

$$\sigma_{t,ex} = \pm \frac{6 m_t(r=r_1)}{h^2}$$

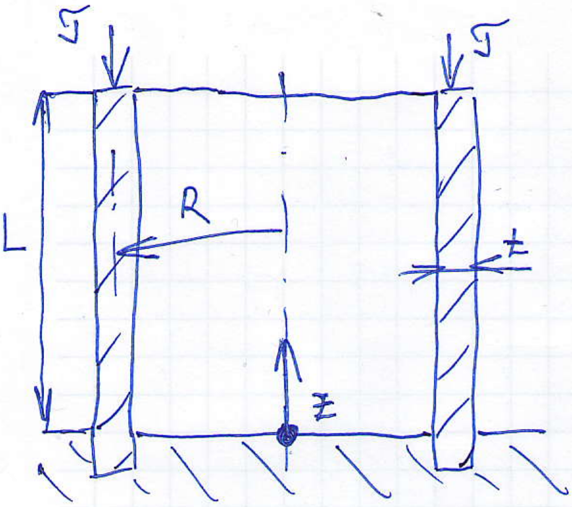
e) z bezpečnosti již určíme max. velikost F

pro určení redukovaného napětí použijeme např. podmínku max τ

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \underset{0}{\sigma_3} = \frac{\sigma_k}{k_k} \qquad \sigma_1 = \max.(\sigma_{r,ex}; \sigma_{t,ex})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F}}$$

f) válcovou část řešíme jako momentovou skořepinu



OP: $z=0: \; v=0$ } dole
$z=0: \; u=0$ } vetknuto

dlouhá X krátká skořepina ?

$l_0 = 3\sqrt{R\cdot t} = 3\cdot\sqrt{200\cdot 10} \doteq 134\,mm$

$L = 500\,mm > 2l_0 \; (268\,mm) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ dlouhá skořepina

stanovení axiálního zatížení:

$$n_z = T(r=R) = \frac{-F}{2\pi R}$$

g) určení napětí ve válci

Největší zatížení válce bude pro $z=0$. Kromě axiálního zatížení zde bude působit díky vetknutí také ohybový moment m_z.

Pro uvedené OP (dlouhá skořepina):

$$u = \hat{u} + u_p = e^{-\beta z}(C_1 \cdot \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + u_p$$

$$u_p = \frac{R^2}{Et}\Big[\underbrace{\underset{\underset{0}{\parallel}}{p_r} - \frac{\mu}{r}\Big(\underset{\underset{n_z(z=0)}{\parallel}}{c_0} - \underset{\underset{0}{\parallel}}{\int p_z\, dz}\Big)}_{p^*}\Big] = \frac{R^2}{Et}\Big(\underbrace{-\frac{\mu}{R}\cdot n_z}_{p^*}\Big) = -\frac{R^2 p^*}{E\cdot t}$$

$$n_z(z=0) = \frac{F}{2\pi R}$$

p^* .. je výsledný tlak způsobující radiální posunutí. Skládá se z radiálního tlaku p_r (typicky by to bylo např. zatížení od tlakové kapaliny či plynu), axiálního silového zatížení (v našem případě $n_z(F)$) a axiálního tlaku p_z (např. dynamické zatížení od proudící kapaliny). V našem případě je jedinou nenulovou složkou $c_0 = n_z(z=0) = \frac{F}{2\pi R}$.

Stanovení C_1 a C_2 z OP: $z=0: \; u=0$
$z=0: \; v = \frac{du}{dz} = 0$

$$u(z=0) = e^{-\beta\cdot 0}(C_1 \cdot \sin \beta 0 + C_2 \cdot \cos \beta \cdot 0) - \frac{R^2 p^*}{Et} = 0$$

$$C_2 = \frac{R^2 p^*}{E\cdot t}$$

$$\frac{du}{dz} = -\beta \cdot e^{-\beta z}\left(C_1 \sin\beta z + C_2 \cos\beta z\right) + e^{-\beta z}\left(C_1 \beta \cos\beta z - C_2 \beta \sin\beta z\right)$$

pre $z=0$: $$\underbrace{-\beta \cdot e^{-\beta 0}}_{-\beta}\left(C_1 \underbrace{\sin\beta\cdot 0}_{0} + C_2 \underbrace{\cos\beta\cdot 0}_{1}\right) + \underbrace{e^{-\beta 0}}_{1}\left(C_1 \beta \underbrace{\cos\beta 0}_{1} - C_2 \beta \underbrace{\sin\beta 0}_{0}\right) = 0$$

$$-\beta C_2 + C_1 \beta = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{R^2 p^*}{E\cdot t}$$

$$u(z) = +e^{-\beta z}\frac{R^2 p^*}{E\cdot t}\left(\sin\beta z + \cos\beta z\right) - \underbrace{\frac{R^2 p^*}{E\cdot t}}_{u_p} = \cancel{e^{-\beta z}\frac{R^2 p^*}{E\cdot t}\left(\sin\beta z + \cos\beta z - 1\right)}$$

Líniový ohybový moment m_z:

$$u(z) = \frac{R^2 p^*}{E\cdot t}\left(e^{-\beta z}\left(\sin\beta z + \cos\beta z\right) - 1\right)$$

$$m_z = -B\frac{d^2u}{dz^2} \quad ; \quad B = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{R^2 p^*}{E\cdot t}\cdot\left[e^{-\beta z}\cdot(-\beta)\cdot\left(\sin\beta z + \cos\beta z\right) + e^{-\beta z}\left(\beta\cos\beta z - \beta\sin\beta z\right)\right] =$$

$$= \frac{R^2 p^*}{E\cdot t}\, e^{-\beta z}\cdot(-\beta)\cdot 2\sin\beta z = -\frac{R^2 p^*}{E\cdot t}\, e^{-\beta z}\cdot\beta\cdot 2\sin\beta z$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{2\beta R^2 p^*}{E\cdot t}\left[e^{-\beta z}\cdot(-\beta)\sin\beta z + e^{-\beta z}\beta\cos\beta z\right] =$$

$$= -\frac{2\beta^2 R^2 p^*}{E\cdot t}\cdot e^{-\beta z}\left(\cos\beta z - \sin\beta z\right)$$

$$m_z = -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\cdot\left(-\frac{2\beta^2 R^2 p^*}{E\cdot t}\right)\cdot e^{-\beta z}\left(\cos\beta z - \sin\beta z\right)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 t^2}} \qquad \beta^2 = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{R\cdot t}$$

$$m_z = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\cdot\frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{R\cdot t}\cdot\frac{2R^2 p^*}{E\cdot t}\cdot e^{-\beta z}\left(\cos\beta z - \sin\beta z\right) \quad /\cdot\frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

$$m_z = \frac{t\cdot R\cdot p^*}{2\cdot\sqrt{3(1-\mu^2)}}\cdot e^{-\beta z}\left(\cos\beta z - \sin\beta z\right)$$

pre $z=0$: $$m_z = \frac{tRp^*}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}} = 0{,}3026\, p^*\cdot R\cdot t$$

$$\sigma_z = \frac{n_z}{t} \pm \frac{6 m_z}{h^2} = \frac{n_z}{t} + 0{,}5447\frac{n_z}{t} = 1{,}5447\frac{n_z}{t} = \sigma_3$$

$$\sigma_t = \frac{n_t}{t} \pm \frac{6 m_t}{h^2} \qquad m_t = \mu\, m_z \Rightarrow \sigma_t = \sigma_2$$

n_z je záporné!

$\sigma_r = 0 = \sigma_1$ - radiální napětí ve stěně válce

max σ: $\sigma_{red} = \underbrace{\sigma_1}_{=0} - \underbrace{\sigma_3}_{=\sigma_z} = \frac{\sigma_k}{k_k} \Rightarrow \sigma_z = \frac{\sigma_k}{k_k}$

po dosazení: $1{,}5447 \cdot \frac{+F}{2\pi R \cdot t} = \frac{\sigma_k}{k_k} \Rightarrow F$

Hodnotu síly F určenou pro válec je nutné porovnat s F určenou pro desku. Rozhodující je nižší hodnota z těchto dvou.

---

2) Jaká bude změna průměru válce?

Největší změna průměru válce bude pro $z=L$, tedy v místě dotyku desky a válce. Vzhledem k volnému konci válce (válec není k desce přivařen) bude $m_z(z=L) = 0$

Radiální posunutí: $u(z=L) = \tilde{u}(z=L) + u_p$

$\tilde{u}$ - je způsobeno momentem m_z, proto pro $z=L$ bude $\tilde{u}=0$

$$u(z=L) = u_p = -\frac{R^2 p^*}{E \cdot t} \qquad p^* = \frac{\mu}{R} \cdot n_z = \frac{\mu}{R} \cdot \left(-\frac{F}{2\pi R}\right)$$

$$u(z=L) = \frac{0{,}3 \cdot F}{2\pi \cdot E \cdot t}$$

změna ϕ válce $= 2 \cdot u(z=L)$