VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

PRUŽNOST A PEVNOST I

Řešené příklady

Výpočet osových kvadratických momentů

Pátek, 9. května 2008

Jan Tihlařík

1 Osové kvadratické momenty průřezů

Geometrické charakteristiky příčného průřezu jsou veličiny, které svým způsobem charakterizují příčný průřez a jsou používány hlavně při výpočtech napětí a deformace pro jednotlivé způsoby namáhání.

Mezi geometrické charakteristiky patří například plocha příčného průřezu, lineární momenty a momenty kvadratické. Zajímat nás budou nyní osové kvadratické momenty. Ty se používají například při řešení napětí a deformace v ohybu. Jejich definice je

$$J_y = \int_{\psi} z^2 \mathrm{d}S \text{ , rozměr je } \left[\mathrm{m}^4\right] , \tag{1}$$

$$J_z = \int_{\psi} y^2 \mathrm{d}S \text{ , rozměr je } \left[\mathrm{m}^4\right] . \tag{2}$$

Spolu s uvedenými osovými kvadratickými momenty je dobré uvést i polární kvadratický moment, který se používá často při řešení napětí a deformace v krutu

$$J_{\mathrm{P}} = \int_{\psi} r^2 \mathrm{d}S \text{ , rozměr je } \left[\mathrm{m}^4\right] , \tag{3}$$

1.1 Steinerovy věty

Osové kvadratické momenty ve vztazích (1) a (2) jsou vztaženy k centrálním osám y a z, tzn. k osám, které procházejí těžištěm průřezu. Pro praktické využití je často potřeba tyto momenty transformovat k posunutým osám y' a z' (často jsou to hlavní centrální osy). K tomu se využívá tzv. Steinerových vět

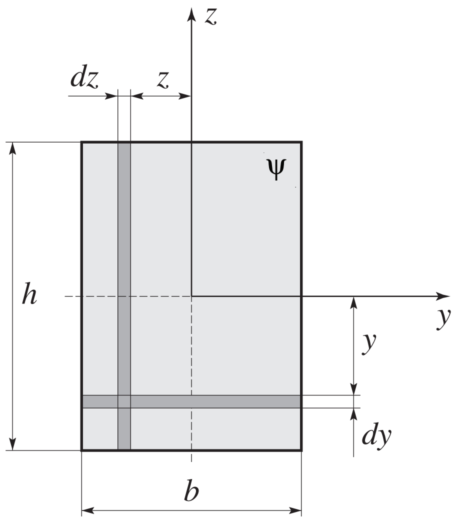
$$J_{y'} = J_y + {z'}^2 S, \tag{4}$$

$$J_{z'} = J_z + {y'}^2 S, \tag{5}$$

kde z' je velikost posunutí y-ové osy a y' je velikost posunutí z-ové osy.

1.2 Řešené příklady

Příklad 1 *Vypočtěte osové kvadratické momenty průřezu obdélníku o rozměrech stran h a b k osám y a z podle obrázku 1.*



Obrázek 1: Obdélníkový příčný průřez.

S použitím vztahů (1) a (2) vypočteme osové kvadratické momenty pro obdélníkový průřez následovně.

$$J_y = \int\limits_{\psi} z^2 \mathrm{d}S, \qquad \text{kde } \mathrm{d}S = b\mathrm{d}z.$$

Integrováním v mezích od $-h/2$ do $h/2$ dostáváme

$$J_y = \int\limits_{\psi} z^2 b\mathrm{d}z = \int\limits_{-h/2}^{h/2} z^2 b\mathrm{d}z = b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = b\left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right] = \frac{bh^3}{12}.$$

Analogicky pro J_z dostáváme

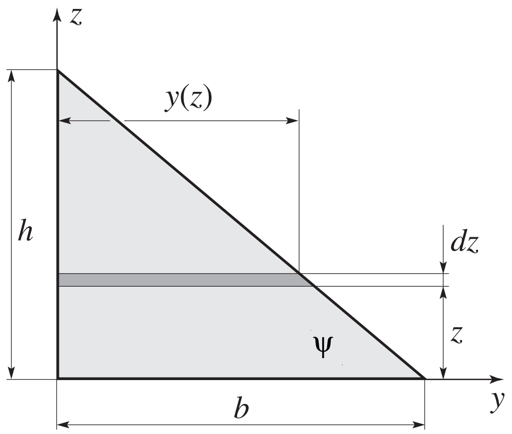
$$J_z = \int\limits_{\psi} y^2 \mathrm{d}S, \qquad \text{kde } \mathrm{d}S = h\mathrm{d}y,$$

$$J_z = \int\limits_{\psi} y^2 h\mathrm{d}y = \int\limits_{-b/2}^{b/2} y^2 h\mathrm{d}y = h\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = h\left[\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8}\right] = \frac{hb^3}{12}.$$

Osové kvadratické momenty obdélníkového průřezu jsou

$$J_y = \frac{bh^3}{12} \qquad \text{a} \qquad J_z = \frac{hb^3}{12}. \tag{6}$$

Příklad 2 *Vypočtěte osové kvadratické momenty trojúhelníkového průřezu o délkách odvěsen h a b k osám y a z podle obrázku 2.*



Obrázek 2: Trojúhelníkový příčný průřez.

Abychom byli schopni vyjádřit plošný element $\mathrm{d}S$, podle něhož budeme integrovat, vyjádříme vzdálenost y jako funkci z, tedy $y\,(z)$ ve tvaru

$$y\,(z) = b - \frac{b}{h}z, \quad \text{plošný element tedy bude } \mathrm{d}S = \left(b - \frac{b}{h}z\right)\mathrm{d}z.$$

Nyní integrujeme opět podle vztahu (1) v mezích od 0 do h

$$\begin{aligned} J_y &= \int\limits_{\psi} z^2 \mathrm{d}S = \int\limits_0^h z^2 \left(b - \frac{b}{h}z\right)\mathrm{d}z = \int\limits_0^h z^2 b \mathrm{d}z - \int\limits_0^h z^3 \frac{b}{h}\mathrm{d}z = \\ &= b\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h - \frac{b}{h}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h = b\frac{h^3}{3} - b\frac{h^3}{4} = \frac{bh^3}{12}. \end{aligned}$$

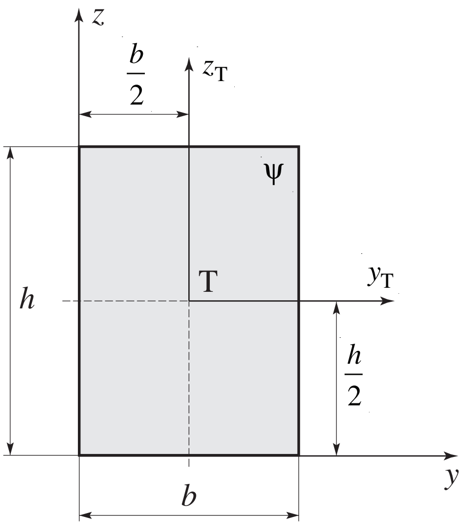
Analogicky

$$\begin{aligned} J_z &= \int\limits_{\psi} y^2 \mathrm{d}S = \int\limits_0^b y^2 \left(h - \frac{h}{b}y\right)\mathrm{d}y = \int\limits_0^b y^2 h \mathrm{d}y - \int\limits_0^b y^3 \frac{h}{b}\mathrm{d}y = \\ &= h\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^b - \frac{h}{b}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^b = h\frac{b^3}{3} - h\frac{b^3}{4} = \frac{hb^3}{12}. \end{aligned}$$

Osové kvadratické momenty trojúhelníkového průřezu jsou tedy

$$J_y = \frac{bh^3}{12} \qquad \text{a} \qquad J_z = \frac{hb^3}{12}. \tag{7}$$

Příklad 3 *Vypočtěte osové kvadratické momenty obdélníkového průřezu o délkách stran h a b k posunutým osám y a z podle obrázku 3.*



Obrázek 3: Obdélníkový příčný průřez a dva souřadné systémy.

Pro výpočet osových kvadratických momentů k posunutým osám y a z použijeme již vypočtené momenty z příkladu 1 a použijeme Steinerovy věty (4) a (5). V příkladu 1 jsme vypočetli centrální osové kvadratické momenty

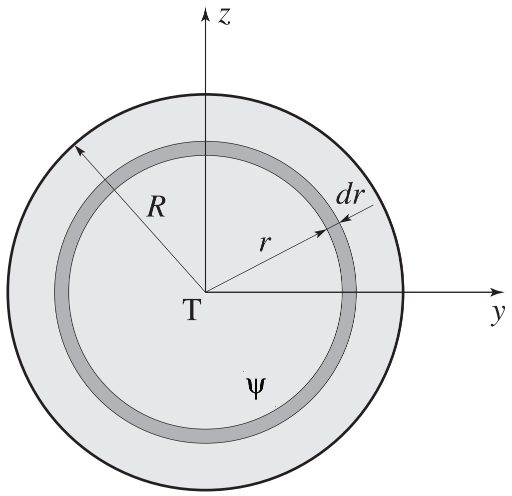
$$J_{y_\mathrm{T}} = \frac{bh^3}{12}, \qquad J_{z_\mathrm{T}} = \frac{hb^3}{12}.$$

Posunutím os o vzdálenosti $h/2$ proti směru osy z a $b/2$ proti směru osy y (viz. obrázek 3) dojde k transformaci osových kvadratických momentů podle Steinerových vět

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_\mathrm{T}} + z'^2 S = \frac{bh^3}{12} + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 S = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}, \\ J_z &= J_{z_\mathrm{T}} + y'^2 S = \frac{hb^3}{12} + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 S = \frac{hb^3}{12} + \frac{hb^3}{4} = \frac{hb^3}{3}. \end{aligned}$$

Porovnáním výsledků před a po posunutí je zřejmé, že osové kvadratické momenty k centrálním osám mají menší hodnotu než stejné momenty k osám posunutým. To je ostatně zřejmé z pohledu na samé Steinerovy věty. Jelikož jsou členy $z'^2 S$ a $y'^2 S$ v (4) a (5) vždy kladné, musí být kvadratický moment ke kterékoliv posunuté ose větší než moment k ose centrální.

Příklad 4 *Vypočtěte polární a osové kvadratické momenty kruhového průřezu o poloměru R k centrálním osám y a z podle obrázku 4.*



Obrázek 4: Kruhový příčný průřez.

Pro výpočet polárního kvadratického momentu použijeme definici (3), tedy

$$J_{\mathrm{P}} = \int_{\psi} r^2 \mathrm{d}S, \quad \text{plošný element bude } \mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r\text{, tedy}$$

$$J_{\mathrm{P}} = \int_{\psi} r^2 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^R r^2 \mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}. \tag{8}$$

Z Pythagorovy věty však plyne $r^2 = y^2 + z^2$, tudíž

$$J_{\mathrm{P}} = \int_{\psi} r^2 \mathrm{d}S = \int_{\psi} \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}S = \int_{\psi} y^2 \mathrm{d}S + \int_{\psi} z^2 \mathrm{d}S = J_z + J_y. \tag{9}$$

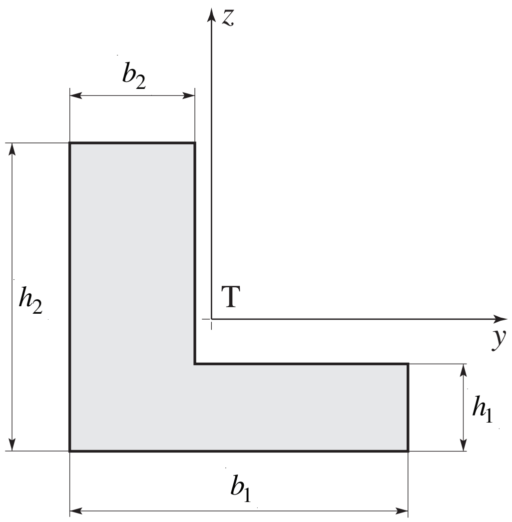
Jelikož je kruhový průřez symetrický vůči osám y a z, budou osové kvadratické momenty stejné. Můžeme tedy napsat $J_y = J_z$ a podle (9) bude

$$J_y + J_z = J_{\mathrm{P}} \Rightarrow J_y = \frac{1}{2} J_{\mathrm{P}}.$$

S použitím výsledku (8) dostáváme hodnoty osových kvadratickým momentů kruhového průřezu

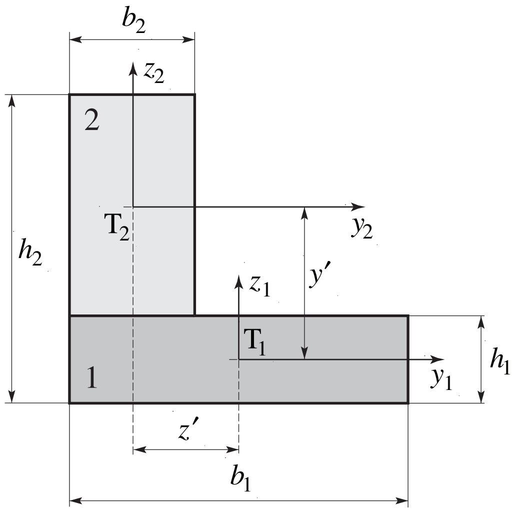
$$J_y = J_z = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Příklad 5 *Vypočtěte osové kvadratické momenty průřezu L-profilu k osám y a z podle obrázku 5.*



Obrázek 5: Příčný průřez L-profilu.

Řešení příkladu začneme rozdělením příčného průřezu L-profilu na dva obdélníkové průřezy, které označíme čísly 1 a 2 podle obrázku 6. Následně vypočteme centrální osové kvadratické momenty pro každou část zvlášť.



Obrázek 6: Příčný průřez L-profilu rozdělený na dvě části.

Využijeme-li výsledků (6) získaných z příkladu 1 pro obdélníkový průřez, budou tedy centrální osové kvadratické momenty J_y^1 a J_z^1 pro část 1

$$J_y^1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} \qquad \text{a} \qquad J_z^1 = \frac{h_1 b_1^3}{12}. \tag{10}$$

Pro část označenou číslem 2 budou centrální osové kvadratické momenty J_y^2 a J_z^2 analogicky

$$J_y^2 = \frac{1}{12} b_2 \left(h_2 - h_1\right)^3 \qquad \text{a} \qquad J_z^2 = \frac{1}{12} b_2^3 \left(h_2 - h_1\right). \tag{11}$$

Máme tedy vyjádřeny osové kvadratické momenty pro části 1 a 2. Abychom vypočetli celkové osové kvadratické momenty pro celý příčný průřez L-profilu, tedy pro osy y a z, musíme jednotlivé momenty (10) a (11) transformovat posunutím a poté je sečíst. Polohu těžiště T určíme

$$z_{\mathrm{T}} = \frac{z' S_2}{S_1 + S_2} \qquad \text{a} \qquad y_{\mathrm{T}} = \frac{y' S_2}{S_1 + S_2}.$$

Podle Steinerových vět (4) budeme transformovat vypočtené momenty posunutím vzhledem k osám y a z, tedy posunutí pro část 1 bude

$$J_{y'}^1 = J_y^1 + z_{\mathrm{T}}^2 S_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + \left(\frac{z' S_2}{S_1 + S_2}\right)^2 S_1,$$
$$J_{z'}^1 = J_z^1 + y_{\mathrm{T}}^2 S_1 = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 + \left(\frac{y' S_2}{S_1 + S_2}\right)^2 S_1.$$

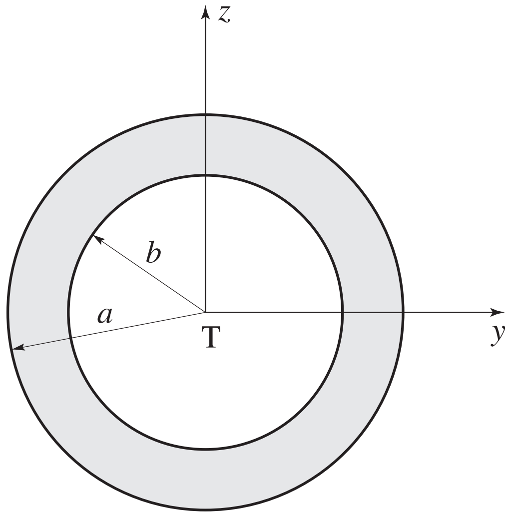
Transformace posunutím pro část 2 bude

$$J_{y'}^2 = J_y^2 + \left(z' - z_{\mathrm{T}}\right)^2 S_2 = \frac{1}{12} b_2 \left(h_2 - h_1\right)^3 + \left(z' - \frac{z' S_2}{S_1 + S_2}\right)^2 S_2\,,$$
$$J_{z'}^2 = J_z^2 + \left(y' - y_{\mathrm{T}}\right)^2 S_2 = \frac{1}{12} b_2^3 \left(h_2 - h_1\right) + \left(y' - \frac{y' S_2}{S_1 + S_2}\right)^2 S_2\,.$$

Nyní stačí sečíst osové kvadratické momenty obou částí a získáme centrální osové kvadratické momenty pro celý L-profil, tedy

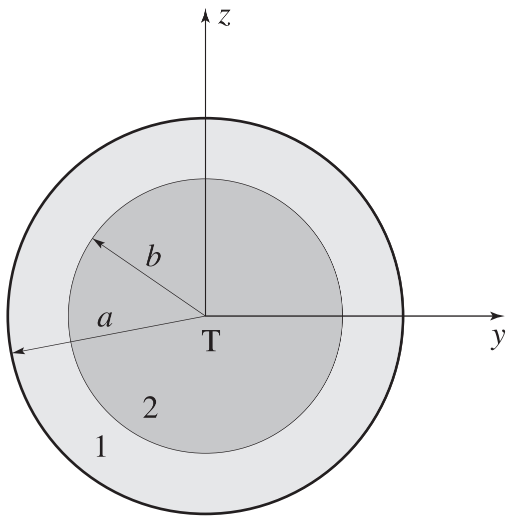
$$J_y = J_{y'}^1 + J_{y'}^2\,,$$
$$J_z = J_{z'}^1 + J_{z'}^2\,.$$

Příklad 6 *Vypočtěte centrální osové kvadratické momenty kruhového průřezu trubky o vnitřním průměru* $2b = 60\,\mathrm{mm}$ *a vnějším průměru* $2a = 50\,\mathrm{mm}$ *k osám* y *a* z *podle obrázku 7.*



Obrázek 7: Příčný průřez kruhové trubky.

Řešení problému spočívá v opětovném rozdělení celého průřezu na dvě kruhové části, jedné o poloměru a (označíme číslem 1) a druhé o průměru b (označíme číslem 2) tak, jak je naznačeno na obrázku 8.



Obrázek 8: Příčný průřez kruhové trubky rozdělený na dvě části.

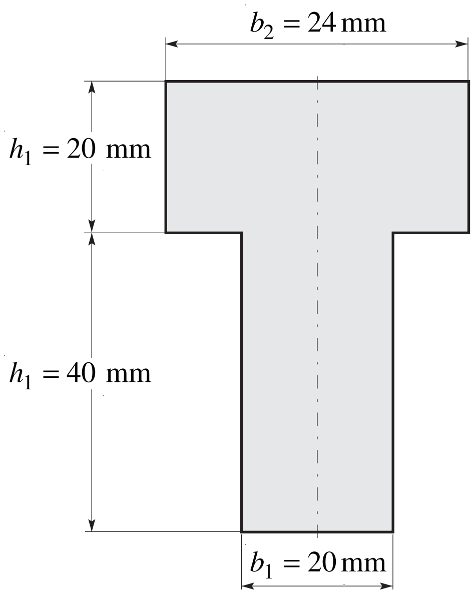
S pomocí výsledků získaných v příkladu 4 spočítáme nejprve polární kvadratické momenty obou částí, které poté od sebe odečteme, tedy

$$J_{\mathrm{P}} = J_{\mathrm{P}}^{1} - J_{\mathrm{P}}^{2} = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi b^2}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(a^2 - b^2\right) \ .$$

Z osové symetrie platí, že $J_y = J_z = \frac{1}{2} J_{\mathrm{P}}$, tedy

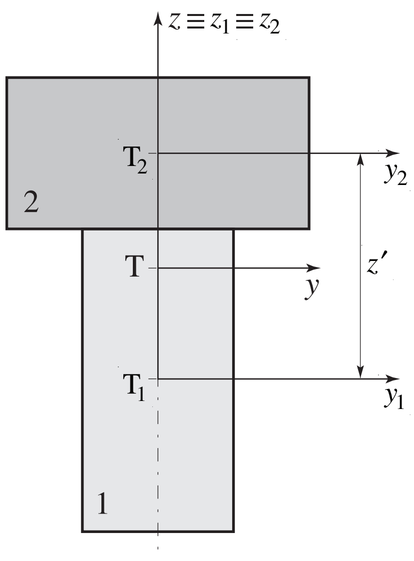
$$J_y = J_z = \frac{\pi}{4}\left(a^2 - b^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(30^2 - 25^2\right) = 215{,}96\,\mathrm{mm}^4$$

Příklad 7 *Vypočtěte centrální osové kvadratické momenty průřezu symetrického T-profilu o rozměrech dle obrázku 9.*



Obrázek 9: Příčný průřez T-profilu.

T-profil je složen ze dvou stejných částí, označíme si je opět čísly 1 a 2. Najdeme nejprve polohu težiště, ke kterému budeme transformovat momenty jednotlivých částí. Vzdálenost těžišť obou částí označíme z' podle obrázku 10.



Obrázek 10: Příčný průřez T-profilu rozdělený na dvě stejné části.

Poloha těžiště tedy určíme

$$z_T = \frac{z' S_2}{S_1 + S_2} = \frac{30 \cdot 800}{800 + 800} = \frac{24000}{1600} = 15\,\mathrm{mm}\,.$$

Nyní spočteme jednotlivé centrální osové kvadratické momenty pro obě dvě části T-profilu. Centrální osové kvadratické momenty pro první část jsou

$$J_y^1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 \,,$$
$$J_z^1 = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 \,,$$

pro část druhou potom

$$J_y^2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 \,,$$
$$J_z^2 = \frac{1}{12} h_2 b_2^3 \,.$$

Nyní provedeme transformaci vypočtených momentů posunutím vzhledem k celkovému těžišti T-profilu

$$\begin{aligned}
J_{y'}^1 &= J_y^1 + z_\mathrm{T}^2 S_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + z_\mathrm{T}^2 h_1 b_1 \,, \\
J_{z'}^1 &= J_z^1 + z_\mathrm{T}^2 S_1 = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 + z_\mathrm{T}^2 h_1 b_1 \,, \\
J_{y'}^2 &= J_y^2 + z_\mathrm{T}^2 S_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + \left(-z_\mathrm{T}\right)^2 h_2 b_2 \,, \\
J_{z'}^2 &= J_z^2 + z_\mathrm{T}^2 S_2 = \frac{1}{12} h_2 b_2^3 + \left(-z_\mathrm{T}\right)^2 h_2 b_2 \,.
\end{aligned}$$

Sečtením vypočtených kvadratických momentů obou částí dostaneme celkové centrální osové kvadratické momenty pro celý průřez T-profilu, tedy

$$J_y = J_{y'}^1 + J_{y'}^2 = \frac{1}{12}\left(b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3\right) + z_\mathrm{T}^2 \left(h_1 b_1 + h_2 b_2\right) \,,$$
$$J_z = J_{z'}^1 + J_{z'}^2 = \frac{1}{12}\left(h_1 b_1^3 + h_2 b_2^3\right) + z_\mathrm{T}^2 \left(h_1 b_1 + h_2 b_2\right) \,.$$

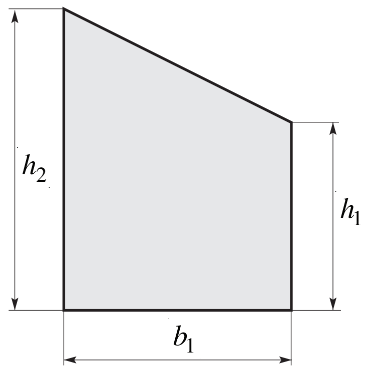
Po dosazení číselných hodnot dostáváme vyýsledné centrální osové kvadratické momenty

$$J_z = 493333\,\mathrm{mm}^4 \,,$$
$$J_y = 493333\,\mathrm{mm}^4 \,.$$

Již dříve jsme si mohli všimnout, že ze symetrie plyne

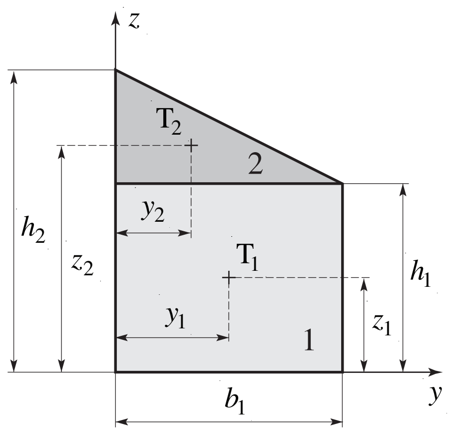
$$J_z = J_y \,.$$

Příklad 8 *Vypočtěte centrální osové kvadratické momenty průřezu dle obrázku 11.*



Obrázek 11: Příčný průřez.

Profil o výšce $h_2 = 45\,\mathrm{mm}$ je rozdělíme na dva základní geometrické útvary – čtverec o rozměrech stran $b_1 = h_1 = 30\,\mathrm{mm}$ a pravoúhlý trojúhelník o délkách odvěsen $b_1 = 30\,\mathrm{mm}$ a $h_2 - h_1 = 15\,\mathrm{mm}$ podle obrázku 12. Pomocí známých poloh těžišť T_1 a T_2 určíme polohu težiště T celého průřezu.



Obrázek 12: Příčný průřez rozdělený na dvě části.

Označme y_1 vzdálenost těžiště T_1 od osy y a z_1 od osy z, analogicky označíme vzdálenosti těžiště T_2 od os souřadného systému jako y_2 a z_2. Polohu těžiště T vypočteme podle vztahů

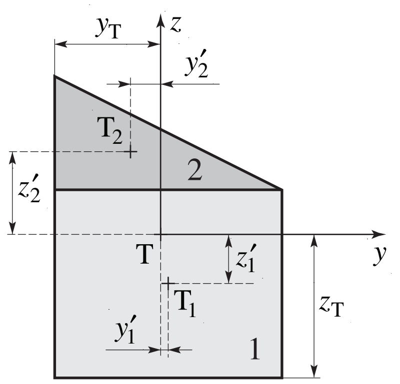
$$y_{\mathrm{T}} = \frac{\sum y_i S_i}{S} \quad , \quad z_{\mathrm{T}} = \frac{\sum z_i S_i}{S} \, , \tag{12}$$

kde S je celková plocha průřezu profilu. Podle (12) bude

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{T}} &= \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{b_1}{2} b_1 h_1 + \frac{b_1}{3} \frac{b_1(h_2 - h_1)}{2}}{b_1 h_1 + \frac{b_1(h_2-h_1)}{2}} \, , \\ z_{\mathrm{T}} &= \frac{z_1 S_1 + z_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{h_1}{2} b_1 h_1 + \left(h_1 \frac{(h_2-h_1)}{3} \right) \frac{b_1(h_2-h_1)}{2}}{b_1 h_1 + \frac{b_1(h_2-h_1)}{2}} \, . \end{aligned}$$

Po dosazení hodnot dostáváme polohu těžiště T průřezu profilu

$$y_{\mathrm{T}} = \frac{13500 + 2250}{900 + 225} = \frac{15750}{1125} = 14\,\mathrm{mm}\,,$$
$$z_{\mathrm{T}} = \frac{13500 + 7875}{900 + 225} = \frac{15750}{1125} = 19\,\mathrm{mm}\,.$$



Obrázek 13: Příčný průřez rozdělený na dvě části.

Dostali jsme tedy nový souřadný systém (obrázek 13). Nyní vypočteme osové kvadratické momenty pro část 1 a 2, které následně transformujeme posunutím k novým osám, procházejícím těžištěm průřezu profilu.

$$\begin{aligned}
J_y^1 &= J_z^1 = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 = 67500\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_y^2 &= \frac{1}{12} b_1 \left(h_2 - h_1\right)^3 + \frac{1}{18} b_1^3 \left(h_2 - h_1\right) = 30937{,}5\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_z^2 &= \frac{1}{12} b_1^3 \left(h_2 - h_1\right) + \frac{1}{18} b_1 \left(h_2 - h_1\right)^3 = 39375\,\mathrm{mm}^4\,.
\end{aligned}$$

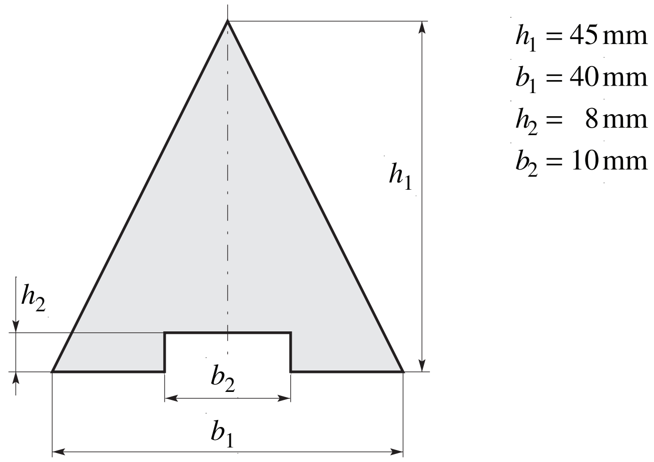
Nyní provedeme transformaci posunutím k novým osám pomocí Steinerových vět

$$\begin{aligned}
J_{y'}^1 &= J_y^1 + {z_1'}^2 S_1 = 67500 + 4^2 \cdot 900 = 81900\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_{z'}^1 &= J_z^1 + {y_1'}^2 S_1 = 67500 + 1^2 \cdot 900 = 68400\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_{y'}^2 &= J_y^2 + {z_2'}^2 S_2 = 30937{,}5 + 16^2 \cdot 225 = 88537{,}5\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_{z'}^2 &= J_z^2 + {y_2'}^2 S_2 = 39375 + 4^2 \cdot 225 = 42975\,\mathrm{mm}^4\,.
\end{aligned}$$

Centrální osové kvadratické momenty pro průřez profilu tedy budou

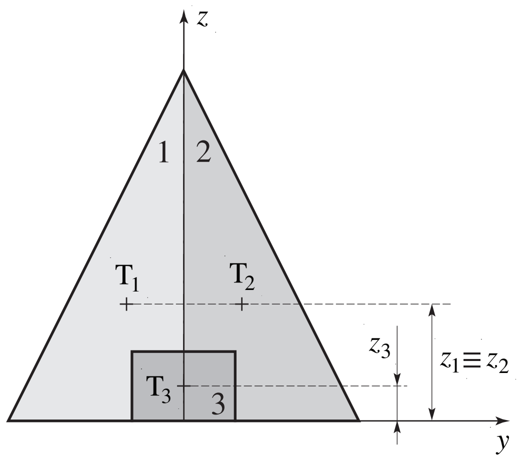
$$\begin{aligned}
J_y &= J_{y'}^1 + J_{y'}^2 = 81900 + 88537{,}5 = 170437{,}5\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_z &= J_{z'}^1 + J_{z'}^2 = 68400 + 42975 = 111375\,\mathrm{mm}^4\,.
\end{aligned}$$

Příklad 9 *Vypočtěte centrální osové kvadratické momenty průřezu symetrického trojúhelníkového profilu s drážkou dle obrázku 14.*



Obrázek 14: Příčný průřez trojúhelníkovým profilem s drážkou.

Opět začneme určením polohy težiště celého profilu. Profil rozdělíme na tři části – dva pravoúhlé trojúhelníky a obdélník. Označíme $z_1 = z_2$ svislou polohu těžiště T_1 a T_2 trojúhelníků vzhledem k souřadnému systému podle obrázku 16 a z_2 svislou polohu těžiště T_3 obdélníku.



Obrázek 15: Příčný průřez rozděleným trojúhelníkovým profilem.

Těžiště T_1 a T_2 leží v jedné třetině výšky trojúhelníků, tedy $z_1 = 15\,\mathrm{mm}$. Těžiště obdélníku je ve výšce $z_2 = 4\,\mathrm{mm}$. Podle vztahů (12) můžeme psát

$$z_{\mathrm{T}} = \frac{z_1 S_1 - z_2 S_2}{S_1 - S_2} = \frac{15 \cdot 900 - 4 \cdot 80}{820} = 16\,\mathrm{mm}.$$

Ze symetrie plyne, že y-ová poloha těžiště T je rovna nule, tedy $y_{\mathrm{T}} = 0\,\mathrm{mm}$. Nyní spočteme osové kvadratické momenty všech částí profilu. Kvůli symetrii budou u trojúhelníků momenty J_y^1 a J_y^2 stejně velké. Dostáváme

$$\begin{aligned} J_y^1 &= J_y^2 = \frac{1}{12}\frac{b_1}{2}h_1^3 = \frac{1}{12}20 \cdot 45^3 = 151875\,\mathrm{mm}^4\,, \\ J_z^1 &= J_z^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{b_1}{2}\right)^3 h_1 = \frac{1}{12}20^3 \cdot 45 = 30000\,\mathrm{mm}^4\,. \end{aligned}$$

Nyní spočítáme osové kvadratické momenty pro oblast 3 obdélníku, tedy

$$\begin{aligned} J_y^3 &= \frac{1}{12}b_2h_2^3 = \frac{1}{12}10 \cdot 8^3 = 426{,}7\,\mathrm{mm}^4\,, \\ J_z^3 &= \frac{1}{12}h_2b_2^3 = \frac{1}{12}8 \cdot 10^3 = 666{,}7\,\mathrm{mm}^4\,. \end{aligned}$$

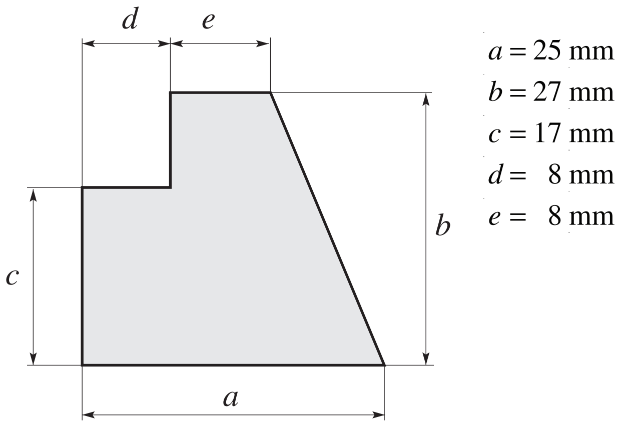
Nyní máme vypočteny osové kvadratické momenty pro celou trojúhelníkovou a obdélníkovou část. Abychom vypočetli celkové centrální osové kvadratické momenty celého průřezu profilu, provedeme transformaci posunutím pomocí Steinerových vět a momenty jednotlivých částí sečteme, tedy

$$\begin{aligned} J_{y'}^1 &= J_{y'}^2 = J_y^1 + {z'}_1^2 S_1 = 151875 + 16^2 \cdot 450 = 267075\,\mathrm{mm}^4\,, \\ J_{z'}^1 &= J_{z'}^2 = J_z^1 + {y'}_1^2 S_1 = 30000 + 0^2 \cdot 450 = 30000\,\mathrm{mm}^4\,, \\ J_{y'}^3 &= J_y^3 + {z'}_3^2 S_3 = 426{,}7 + 12^2 \cdot 80 = 11946{,}7\,\mathrm{mm}^4\,, \\ J_{z'}^3 &= J_z^3 + {y'}_3^2 S_3 = 666,7 + 0^2 \cdot 80 = 666{,}7\,\mathrm{mm}^4\,. \end{aligned}$$

Výsledné centrální osové kvadratické momenty pro trojúhelníkový profil s obdélníkovou drážkou jsou

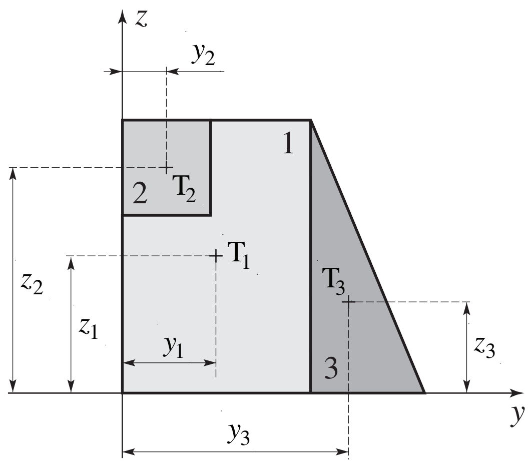
$$\begin{aligned} J_y &= J_{y'}^1 + J_{y'}^2 - J_{y'}^3 = 267075 + 267075 - 11946{,}7 = 522203{,}3\,\mathrm{mm}^4\,, \\ J_z &= J_{z'}^1 + J_{z'}^2 - J_{z'}^3 = 30000 + 30000 - 666{,}7 = 59333{,}3\,\mathrm{mm}^4\,. \end{aligned}$$

Příklad 10 *Vypočtěte centrální osové kvadratické momenty průřezu dle obrázku 16.*



Obrázek 16: Příčný průřez profilem.

Průřez profilu si rozdělíme na dva obdélníky a jeden trojúhelník. Označíme si polohu jejich težišť y_i a z_i, kde index i značí jednotlivé oblasti 1, 2 a 3. Pomocí těchto poloh si vypočteme polohu hlavního těžiště T, tedy y_{T} a z_{T} podle obrázku 17.



Obrázek 17: Příčný průřez rozdělený na tři základní části.

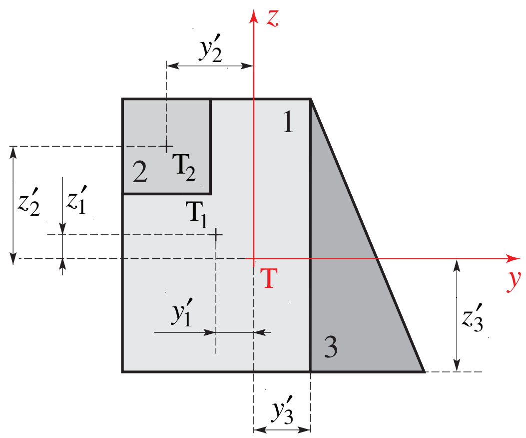
Ze zadaných rozměrů profilu snadno určíme polohy těžišť jednotlivých částí vůči počátku souřadného systému, tedy

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 8\,\mathrm{mm} \quad ; \quad z_1 = 13{,}5\,\mathrm{mm},\\
y_2 &= 4\,\mathrm{mm} \quad ; \quad z_2 = 22\,\mathrm{mm},\\
y_3 &= 19\,\mathrm{mm} \quad ; \quad z_3 = 9\,\mathrm{mm}.
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu těžiště celého průžezu. Opět využijeme vztahu (12), tedy

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{T}} &= \frac{y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2 + y_3 \cdot S_3}{S_1 - S_2 + S_3} = \frac{8 \cdot 432 - 4 \cdot 80 + 19 \cdot 121,5}{432 - 80 + 121{,}5} = 11{,}5\,\mathrm{mm}, \\
z_{\mathrm{T}} &= \frac{z_1 \cdot S_1 - z_2 \cdot S_2 + z_3 \cdot S_3}{S_1 - S_2 + S_3} = \frac{13,5 \cdot 432 - 22 \cdot 80 + 9 \cdot 121{,}5}{432 - 80 + 121,5} = 10{,}9\,\mathrm{mm}.
\end{aligned}
$$

Získali jsme těžiště T celého průřezu, umístíme do něj tedy nový souřadný systém (červeně na obrázku 18). Nyní přistoupíme k výpočtu osových kvadratickým momentů jednotlivých částí profilu. Pro obdélníkové části budeme počítat momenty k centrálním osám, pro trojúhelník potom momenty podle definice (7), tedy



Obrázek 18: Vzdálenosti mezi těžišti.

$$
\begin{aligned}
J_y^1 &= \frac{1}{12}(d+e)b^3 = \frac{1}{12}16 \cdot 27^3 = 26244\,\mathrm{mm}^4\,, \\
J_z^1 &= \frac{1}{12}(d+e)^3 b = \frac{1}{12}16^3 \cdot 27 = 9216\,\mathrm{mm}^4\,, \\
J_y^2 &= \frac{1}{12}(b-c)^3 d = \frac{1}{12}10^3 \cdot 8 = 666{,}7\,\mathrm{mm}^4\,, \\
J_z^2 &= \frac{1}{12}(b-c)d^3 = \frac{1}{12}10 \cdot 8^3 = 426{,}7\,\mathrm{mm}^4\,, \\
J_y^3 &= \frac{1}{12}(a-d-e)b^3 = \frac{1}{12}9 \cdot 27^3 = 14762{,}25\,\mathrm{mm}^4\,, \\
J_z^3 &= \frac{1}{12}(a-d-e)^3 b = \frac{1}{12}9^3 \cdot 27 = 1640{,}25\,\mathrm{mm}^4\,.
\end{aligned}
$$

Nyní provedeme transformaci posunutím vzhledem k centrálnímu souřadnému systému celého průřezu. Použijeme při tom Steinerovy věty, tedy

$$
\begin{aligned}
J_{y'}^1 &= J_y{}^1 + z'^2_1 S_1 = 26244 + (2{,}6)^2 \cdot 432 = 29164{,}32\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_{z'}^1 &= J_z{}^1 + y'^2_1 S_1 = 9216 + (3{,}5)^2 \cdot 432 = 14508\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_{y'}^2 &= J_y{}^2 + z'^2_2 S_2 = 666,7 + (11{,}1)^2 \cdot 80 = 10523{,}5\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_{z'}^2 &= J_z{}^2 + y'^2_2 S_2 = 426{,}7 + (7{,}5)^2 \cdot 80 = 4926{,}7\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_{y'}^3 &= J_y{}^3 + z'^2_3 S_3 = 14762{,}25 + (10{,}9)^2 \cdot 121{,}5 = 29197{,}7\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_{z'}^3 &= J_z{}^3 + y'^2_3 S_3 = 1640{,}25 + (-4{,}5)^2 \cdot 121,5 = 4100{,}6\,\mathrm{mm}^4\,.
\end{aligned}
$$

Pro získání celkových centrálních osových kvadratických momentů profilu stačí nyní posčítat vypočtené transformované momenty, tedy

$$
\begin{aligned}
J_y &= J_{y'}^1 - J_{y'}^2 + J_{y'}^3 = 29164{,}32 - 10523{,}5 + 29197{,}7 = 47838{,}5\,\mathrm{mm}^4\,,\\
J_z &= J_{z'}^1 - J_{z'}^2 + J_{z'}^3 = 14508 - 4926{,}7 + 4100{,}6 = 13681{,}9\,\mathrm{mm}^4\,.
\end{aligned}
$$