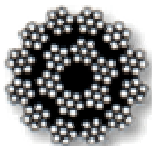
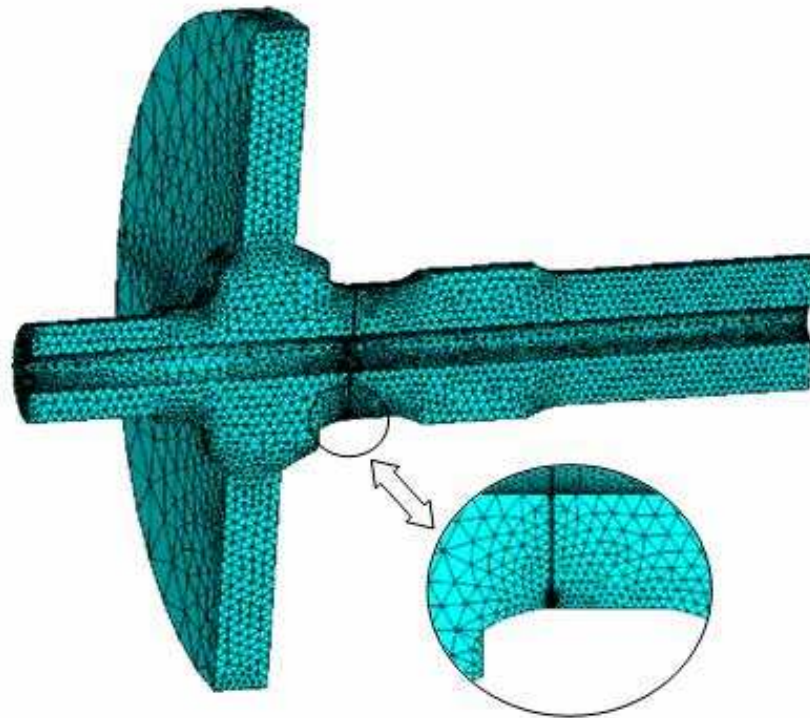


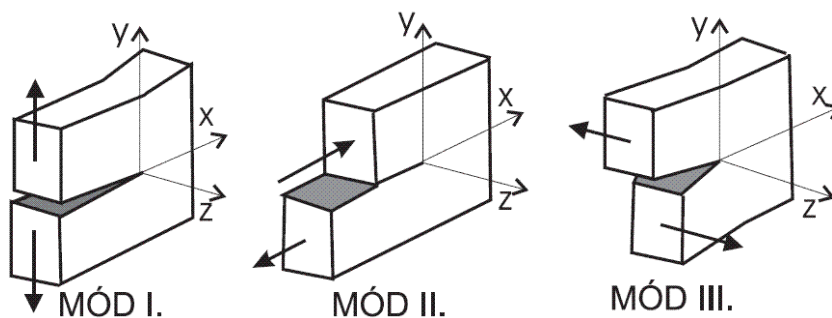
# 9. Lineárně elastická lomová mechanika

## K-koncepce



# Faktor intenzity napětí

- Předpokládáme ostrou trhlinu namáhanou třemi základními módy zatížení

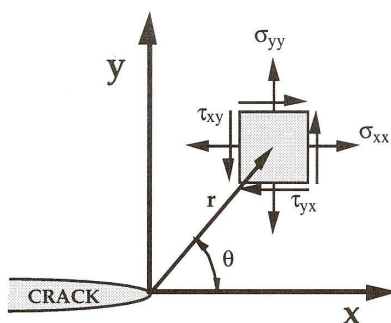


Zredukujeme-li obecnou trojrozměrnou úlohu na úlohu rovinnou v kartézských souřadnicích naznačených na obrázku, jsou potom diferenciální rovnice rovnováhy splněny, vyjádříme-li složky tenzoru napětí pomocí **Airyho funkce**:

$$\sigma_x = \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} \quad \sigma_y = \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \quad \tau_{xy} = \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y}$$

jsou-li splněny zároveň rovnice kompatibility, musí být funkce **F** biharmonická:

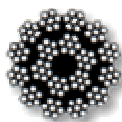
$$\frac{\delta^4 F}{\delta y^4} + 2 \frac{\delta^4 F}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 F}{\delta x^4} = \nabla^2 \nabla^2 F = 0$$



Souřadný systém v kořeni trhliny

řešení hledáme ve tvaru nekonečné řady :

$$F(r, \theta) = \sum_k A_k r^{\lambda_k} f_k(\theta)$$



# Faktor intenzity napětí

Po aplikaci okrajových podmínek získáme výraz pro napětí ve tvaru nekonečné řady známé jako Williamsův rozvoj:

$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 \sqrt{r} f_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots$$

Vezmeme-li v úvahu pouze první, singulární člen získáme vztahy pro rozdělení napětí:

	Mode I	Mode II
$\sigma_{xx}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
$\sigma_{yy}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
$\tau_{xy}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
$\sigma_{zz}$	<b>0</b> (Plane Stress) v ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ) (Plane Strain)	<b>0</b> (Plane Stress) v ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ) (Plane Strain)
$\tau_{xz},$ $\tau_{yz}$	<b>0</b>	<b>0</b>

[Anderson 1995]



# Faktor intenzity napětí

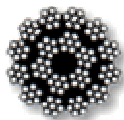
Vezmeme-li v úvahu pouze první, singulární člen získáme vztahy pro posuvy:

	Mode I	Mode II
$u_x$	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$
$u_y$	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$

[Anderson 1995]

Pro třetí mód zatěžování:

$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$



# Faktor intenzity napětí – určení pomocí MKP

---

Vybrané metody stanovení faktoru intenzity napětí:

- **Přímá metoda** - je asi nejjednodušší metoda. Je založena na porovnání numerického řešení rozdělení napětí nebo posuvů v okolí kořene trhliny s řešením pomocí definičních vztahů.
- **Metoda posunutých uzlových bodů** - Její aplikace spočívá v posunutí uzlových bodů do jedné čtvrtiny délky elementu. Tím modelujeme singularitu typu  $r^{1/2}$ .
- **Energetické přístupy** - jsou založeny na jednoznačné relaci mezi hnací silou trhliny  $G$  a faktorem intenzity napětí.
  - **Metoda dvojího výpočtu** - provedeme výpočet pro dvě málo lišící se délky trhliny při stejných okrajových podmínkách. A velikost hnací síly je potom dána změnou energie nepjatosti při změně délky trhliny.
  - **Metoda J-integrálu** – tato metoda je založena na tom, že hodnota  $J$  v elastickém případě přechází v hodnotu hnací síly trhliny.



# Faktor intenzity napětí – přímá metoda

- **Přímá metoda** - je asi nejjednodušší metoda. Je založena na porovnání numerického řešení rozdělení napětí nebo posuvů v okolí kořene trhliny s řešením pomocí definičních vztahů.

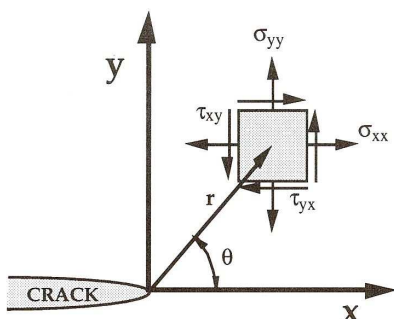
Např. pro mód I:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

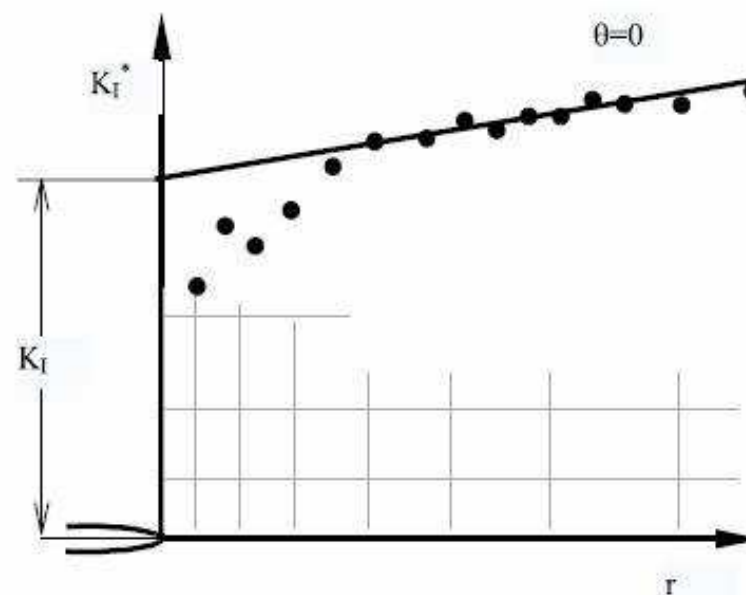
Položíme-li  $\theta = 0$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$K_I = \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}$$



- Tento postup je velice jednoduchý co do provedení a implementace do jakéhokoli systému majícího schopnost vyčíslit hodnoty napětí popř. deformace v okolí kořene trhliny.
- Nevýhodou jsou především vysoké nároky na síť konečných prvků a tím i na spotřebu strojového času což může být u geometricky náročnějších úloh rozhodující (v literatuře se např. doporučuje velikost prvku sto až dvěstěkrát menší než délka trhliny).
- Problematická je i volba velikosti oblasti pro extrapolaci která vyžaduje určitou zkušenost výpočtáře.



Extrapolace při určení hodnoty faktoru intenzity napětí pomocí přímé metody



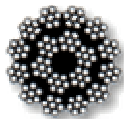
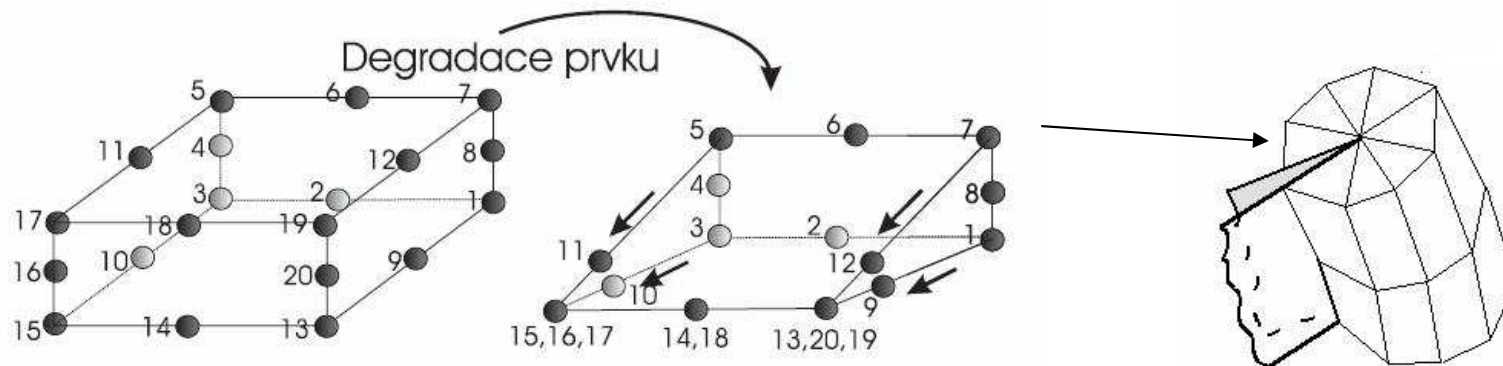
## Faktor intenzity napětí – metoda posunutých uzlových bodů

- **Metoda posunutých uzlových bodů** - Další z metod užívaných k určení faktoru intenzity napětí a T-napětí je metoda posunutých uzlových bodů. Její aplikace spočívá v posunutí uzlových bodů do jedné čtvrtiny délky elementu. Tím modelujeme singularitu typu  $r^{1/2}$  a faktor intenzity napětí lze následně určit z posuvů na takto modifikovaném prvku.

rozdělení napětí v okolí kořene trhliny na modifikovaném prvku lze napsat symbolicky takto:

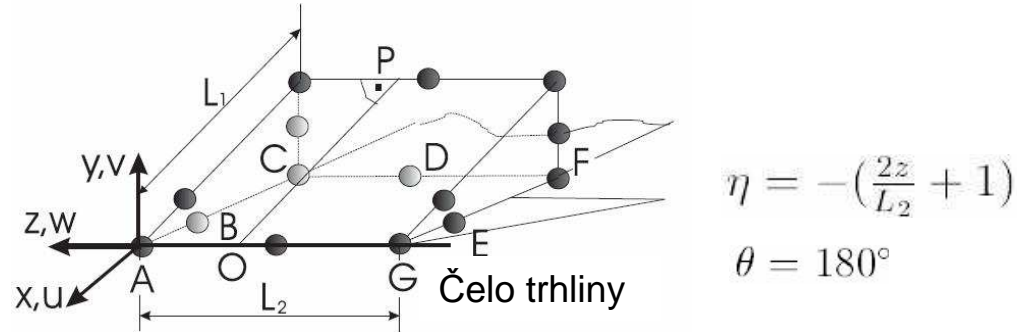
$$\sigma_{ij} = \frac{C_{1ij}}{\sqrt{r}} + C_{2ij}$$

Faktor intenzity napětí odpovídá konstantě  $C_{1ij}$  a konstanta  $C_{2ij}$  odpovídá T-napětí.



## Faktor intenzity napětí – metoda posunutých uzlových bodů

zavede-li na degenerovaném prvku posuvy v následujícím souřadném systému:

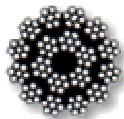


Získáme vztahy pro výpočet faktoru intenzity napětí pro rovinnou deformaci ve tvaru:

$$K_I = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2L_1}} [2v_B - v_C + 2v_E - v_F + v_D + \frac{1}{2}\eta(-4v_B + v_C + 4v_E - v_F) + \frac{1}{2}\eta^2(v_F + v_C - 2v_D)]$$

$$K_{II} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2L_1}} [2u_B - u_C + 2u_E - u_F + u_D + \frac{1}{2}\eta(-4u_B + u_C + 4u_E - u_F) + \frac{1}{2}\eta^2(u_F + u_C - 2u_D)]$$

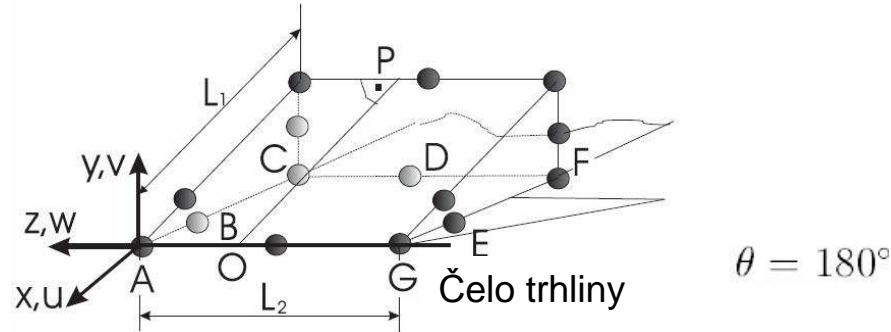
$$K_{III} = \frac{E}{2(1+\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{2L_1}} [2w_B - w_C + 2w_E - w_F + w_D + \frac{1}{2}\eta(-4w_B + w_C + 4w_E - w_F) + \frac{1}{2}\eta^2(w_F + w_C - 2w_D)]$$





## Faktor intenzity napětí – metoda posunutých uzlových bodů

zavede-li na degenerovaném prvku posuvy v následujícím souřadném systému:



Pro 2D úlohu, uvažujeme tedy pouze posuvy v bodech A,B,C:

$$K_I = \frac{4\mu\sqrt{\frac{2\pi}{L}}(4v_B - v_C - 3v_A)}{[(2\kappa + 1)\sin\theta/2 - \sin 3\theta/2]}$$

$$K_{II} = \frac{4\mu\sqrt{\frac{2\pi}{L}}(4u_B - u_C - 3u_A)}{[-(2\kappa + 3)\sin\theta/2 - \sin 3\theta/2]}$$

kde:  $\kappa = 3 - 4\nu$

pro podmínku rovinné deformace

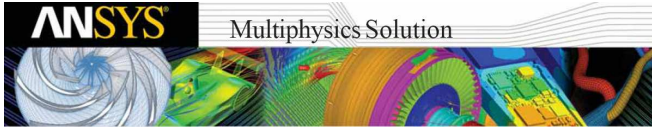
$$\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$$

pro podmínku rovinné napjatosti

Určení hodnot faktoru intenzity napětí pomocí posunutých uzlových bodů je jedna z nejpoužívanějších metod. Samotné posunutí uzlových bodů umožňuje většina systémů MKP. Tato metoda je rychlá nepříliš náročná na implementaci a dosahuje poměrně velké přesnosti i při hrubé síti.



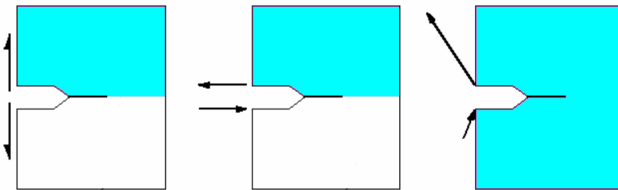
# Faktor intenzity napětí – metoda posunutých uzlových bodů



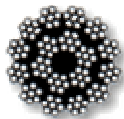
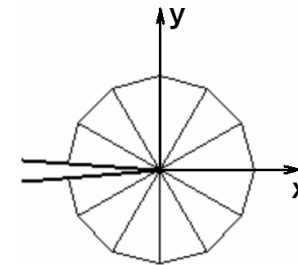
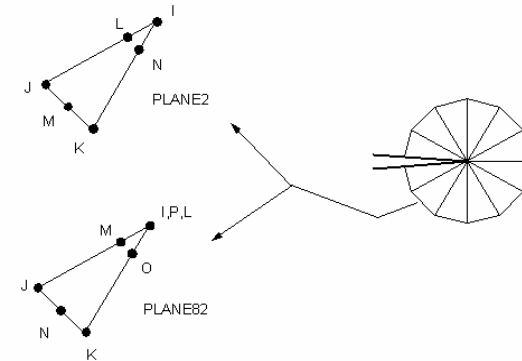
Při řešení **2D úloh** se v systému Ansys využívá příkaz **KSCON**, který automaticky vytvoří singulární elementy kolem zvoleného bodu!

Doporučení při tvorbě modelu MKP v Ansysu:

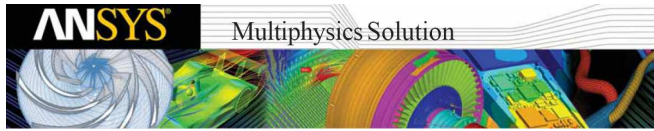
- je-li to možné, využívat symetrii, resp. antisymetrii modelu



- prvky v okolí čela trhliny by neměly být zdeformované – ideální tvar ve 2D modelu: rovnostranný trojúhelník (analogicky 3D)
- délka ramen trojúhelníka by měla být rovna nebo menší než 1/10 délky trhliny
- počet elementů v obvodovém směru v okolí čela trhliny se doporučuje 10 až 14
- doporučená orientace souřadných os: osa x ve směr líců trhliny, osa y kolmo na čelo trhliny, osa z směr čela trhliny



# Faktor intenzity napětí – metoda posunutých uzlových bodů



Při řešení **2D úloh** se v systému Ansys využívá příkaz preprocesoru **KSCON**, který automaticky vytvoří singulární elementy kolem zvoleného bodu!

**KSCON**, *NPT*, *DELR*, *KCTIP*, *NTHET*, *RRAT*

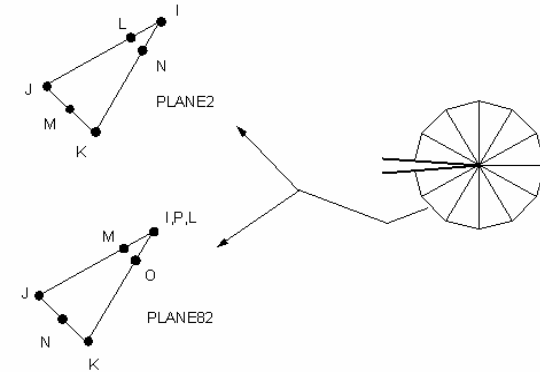
↑  
číslo Keypointu  
ve vrcholu trhliny

↑  
poloměr  
1.řady elementů

↑  
1 ... posunutí  
středového  
uzlu do 1/4

↑  
rozdělení  
obvodového  
úhlu

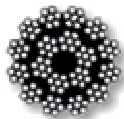
↑  
poměr velikosti  
první a druhé řady  
elementů



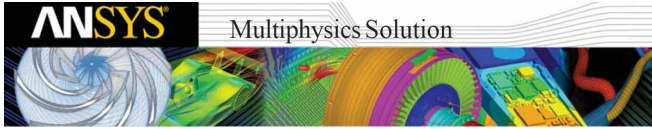
Příklad:

**KSCON,1,a/30,1,6,1.2**

- Prvky s posunutými uzlovými body jsou vytvořeny se středem v **KEYPOINTU 1**
- Poloměr první řady elementů je **a/30**
- Posunutí středového uzlu je provedeno do 1/4
- Po obvodu je **šest** prvků (0-90°)
- Druhá vrstva prvků je **1.2x** větší



# Faktor intenzity napětí – metoda posunutých uzlových bodů



Pro výpočet faktoru intenzity napětí se používá příkaz postprocesoru **KCALC**:

**KCALC**,*NODE(I),NODE(J),NODE(K)*

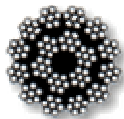
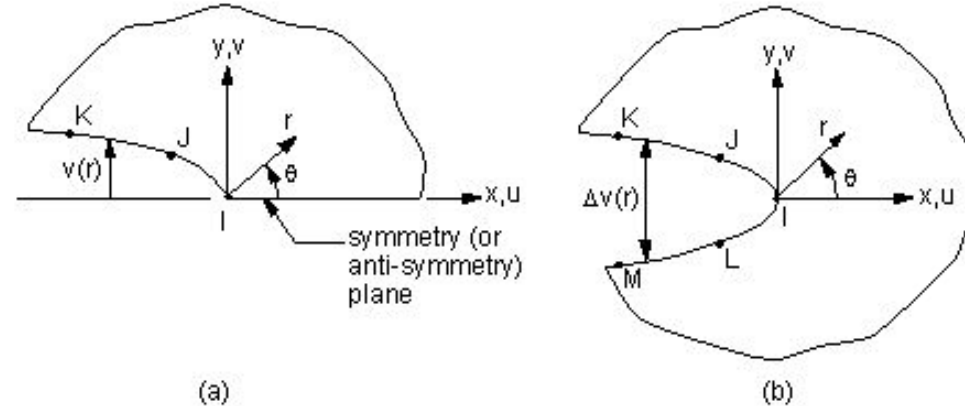
Definuje cestu pro výpočet faktoru intenzity napětí pro symetrický model 3 uzly pro celý model 5 uzlů.

**KCALC**, *KPLAN, MAT, KCSYM, KLOCPR*

*KPLAN* → 0 ... rovinná deformace (plane strain)  
→ 1 ... rovinná napjatost (plane stress)

*MAT* → 0 ... číslo materiálu (pokud se neuvede, automaticky 1)

*KCSYM* → 0 nebo 1 ... poloviční model s využitím symetrie  $K_{II}=K_{III}=0$  (stačí 3 body k vytvoření cesty)  
→ 2 ... jako 1 s vyloučením antisymetrické okrajové podmínky  $K_I=0$   
→ 3 plný model (nutno zadat 5 bodů k vytvoření cesty)



## Faktor intenzity napětí – energetické metody

Energetické přístupy jsou založeny na jednoznačné relaci mezi hnací silou trhliny  $G$  a faktorem intenzity napětí:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad \text{kde} \quad \begin{cases} \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{pro rovinnou deformaci} \\ \bar{E} = E & \text{pro rovinnou napjatost} \end{cases} \quad \begin{matrix} E \text{ modul pružnosti} \\ \nu \text{ Poissonovo číslo} \end{matrix}$$

U dvourozměrných modelů dávají metody přímé a energetické podobné výsledky, protože čelo trhliny se redukuje na jeden bod. U třírozměrných modelů čelo trhliny může být obecná křivka, zde se tyto metody již liší. Pokud vycházíme z napjatosti v blízkosti čela trhliny nedostaneme jednu hodnotu  $K_I$ , jak tomu bylo ve dvou dimenzích, ale celý soubor hodnot charakterizujících každý bod čela trhliny. Lze tedy snadněji usoudit u složitějších geometrií trhlín na způsob jejich šíření. Naopak u energetické metody dostaneme jednu hodnotu charakterizující celou trhlínu a nelze vyloučit vyšší hodnoty lomových parametrů v některé oblasti čela trhliny. U trhlín, kde předem neznáme způsob jejich šíření proto nejsou energetické metody příliš vhodné.

- **Metoda dvojího výpočtu** - provedeme výpočet pro dvě málo lišící se délky trhliny při stejných okrajových podmínkách. A velikost hnací síly je potom dána změnou energie nepjatosti při změně délky trhliny:

$$G \approx \frac{[U(a+da) - U(a)]}{da}$$

Délka trhliny se mění tak, že se její velikost změní o délku jednoho elementu sítě MKP ve směru předpokládaného růstu trhliny. Přírůstek trhliny se doporučuje v intervalu  $10^{-3} \leq da/a \leq 10^{-2}$ . Nevýhodou této metody je nutnost dvojího výpočtu, čímž se do značné míry eliminuje výhoda možnosti použití hrubé sítě.

- **Metoda J-integrálu** – tato metoda je založena na tom, že hodnota  $J$  v elastickém případě přechází v hodnotu hnací síly trhliny.



## Stanovení dalšího směru šíření trhliny

➔ Kriterium maximálního tangenciálního napětí  $(\sigma_{\theta\theta})_{\max}$  :

$$\left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}\right)_{\theta=\varphi_0} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\varphi_0} < 0$$

Po dosažení vztahů odpovídajícím faktoru intenzity napětí v modu I a II dostaneme vztah pro úhel dalšího šíření trhliny:

$$\varphi_0 = 2 \arctg \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right) \right]$$

➔ Kriterium minimální hustoty deformační energie:

$$S = a_{11} k_1^2 + 2a_{12} k_1 k_2 + a_{22} k_2^2 + a_{33} k_3^2$$

kde:

$$K_i = k_i \sqrt{\pi} \quad \text{a} \quad a_{ij} \text{ jsou funkce úhlu } \theta$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{\theta=\varphi_0} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\varphi_0} > 0$$



## Použitá literatura:

---

- Anderson, T.,L., Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications, CRC Press Inc., 1995
- Dowling, E. N., Mechanical behavior of materials, Simon & Schuster Comp., New Jersey, 1999
- Kunz, J., Základy lomové mechaniky, skripta ČVUT, 1994
- Vlk, M., Mezní stavy a spolehlivost, skripta VUT, 1991
- Ondráček, E., Vrbka, J., Janíček, P., Mechanika těles pružnost a pevnost II, skripta VUT, 1991

